非分割財の市場（１月１５日，１月１９日）

I. 手袋ゲーム

- L：売り手の集合，一単位の非分割財を所持
- R：買い手の集合，
- 売り手：評価額 $= 0$
- 買い手：評価額 $= 1$

$$v(S) = \min\{|S \cap R|, |S \cap L|\}$$

II. ベームバベルク (Bohm-Bawerk) 市場（通称：馬の市場）

- 売り手は一単位の非分割財を所持
- 評価額は売り手と買い手によって違う．
- ただし，買い手にとって売り手の財は区別しない．すなわち，売り手 j と売り手 k の財に対する評価額は同じであると仮定．

例 1

売り手	評価額	買い手	評価額
1	7	$1'$	20
2	12	$2'$	17

$$v(\{1, 2, 1', 2'\}) = 18$$

$$v(\{1, 2, 1'\}) = 13, v(\{1, 2, 2'\}) = 10, v(\{1, 1', 2'\}) = 13, v(\{2, 1', 2'\}) = 8$$

$$v(\{1, 1'\}) = 13, v(\{1, 2'\}) = 10, v(\{2, 1'\}) = 8, v(\{2, 2'\}) = 5$$

その他の提携 S, $v(S) = 0$.

- $C = \{(x_1, x_2, x_{1'}, x_{2'}) \in A | x_1 + x_{1'} = 13, x_2 + x_{2'} = 5, x_1 + x_{2'} = 10, x_2 + x_{1'} = 8\}$
- $x \in C$ をとる．財の価格を p とし，p を使いコア配分 x を実現することを考える．このとき，$x_1 = p - 7$, $x_2 = p - 12$, $x_{1'} = 20 - p$, $x_{2'} = 17 - p$. コアの条件をみたすためには $12 \leq p \leq 17$.　したがって，

$$C = \{(x_1, x_2, x_{1'}, x_{2'}) | x_1 = p - 7, x_2 = p - 12, x_{1'} = 20 - p, x_{2'} = 17 - p\ , 12 \leq p \leq 17\}$$

- 均衡価格：需要 = 供給
- 仁 $= (15/2, 5/2, 11/2, 5/2)$, $p = 29/2 = 14.5$.

一般的なモデル：

- $L = \{1, 2, \cdots, l\}$, $R = \{1', 2', \cdots, r'\}$
- h_i：買い手 i の評価額, $h_{1'} \geq h_{2'} \geq \cdots \geq h_{r'}$
- c_j: 売り手 j の評価額，$c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_l$
- 買い手 i, 売り手 j に対し $v(\{i, j\}) = \max\{0, h_i - c_j\} = a_{ij}$
- a_{ij}：i と j との取引による便益
- 取引が成立していないとき $\rightarrow$ 便益 0
- $S \subseteq N$ S 内の買い手の集合を $\{i_1, i_2, \cdots, i_p\}$, 売り手の集合を $\{j_1, j_2, \cdots, j_q\}$．ここで $p < q$ と仮定し，$h_{i_1} \geq h_{i_2} \geq \cdots \geq h_{i_p}$ と $c_{j_1} \leq c_{j_2} \leq \cdots \leq c_{j_q}$ とする．

$$v(S) = a_{i_1 j_1} + a_{i_2 j_2} + \cdots + a_{i_p j_p}$$

- $v(S)$：S 内で取引が行われたときの最大便益
- $x \in C \Leftrightarrow$ 任意の買い手 i と売り手 j に対し，$x_i + x_j \geq a_{ij}$ を満たす．

<u>例 2</u>

売り手	評価額	買い手	評価額
1	7	$1'$	20
2	<u>15</u>	$2'$	<u>13</u>

$$v(\{1, 2, 1', 2'\}) = 13$$

$$v(\{1, 2, 1'\}) = 13, v(\{1, 2, 2'\}) = 6, v(\{2, 1', 2'\}) = 5$$

$$v(\{1, 1'\}) = 13, v(\{1, 2'\}) = 6, v(\{2, 1'\}) = 5, v(\{2, 2'\}) = 0$$

その他の提携 S, $v(S) = 0$.

- コア：$C = \{x \in A | x_1 + x_{1'} = 13, x_2 = x_{2'} = 0, x_{1'} \geq 5, x_1 \geq 6\} = \{x \in A | x_1 = p - 7, x_{1'} = 20 - p, x_2 = x_{2'} = 0, 13 \leq p \leq 15\}$

III. 割当問題 (Shapley and Shubik (1972))

- ベームバベルク市場との相違点：売り手によって財が違う．例えば売り手 1 の馬と売り手 2 の馬を別と考え，買い手の評価額も財により異なる．
- 一般的には h_{ij}：買い手 i が売り手 j が所持している財に対する評価額

買い手	1 の財	2 の財
$1'$	5	13
$2'$	10	16

- $c_1 = 1$, $c_2 = 5$, をそれぞれの売り手が自分の財に対する評価額とする
- $a_{ij} = \max\{0, h_{ij} - c_j\}$ とし，i と j が取引したときの便益を表す．
- 以下 a_{ij} の表

$$\begin{array}{c|cc|} & 1' & 2' \\ \hline 1 & 4 & \underline{9} \\ 2 & \underline{8} & 11 \\ \hline \end{array}$$

- 1 と $2'$，2 と $1'$ がそれぞれ取引することにより a_{ij} の和が最大になっている．特性関数形ゲームでによる定式化：

$$v(\{1, 2, 1', 2'\}) = 17$$

$$v(\{1, 2, 1'\}) = 8, v(\{1, 2, 2'\}) = 11, v(\{1, 1', 2'\}) = 9, v(\{2, 1', 2'\}) = 11$$

$$v(\{1, 1'\}) = 4, v(\{1, 2'\}) = 9, v(\{2, 1'\}) = 8, v(\{2, 2'\}) = 11$$

その他の S, $v(S) = 0$.

- ベームバベルク市場のときと同様：$x \in C \Leftrightarrow$ 任意の買い手 i と売り手 j に対し，$x_i + x_j \geq a_{ij}$.
- $v(N)$ を求める $\rightarrow$ 以下の最大化問題を考える

$$\max_{x_{ij}} x_{11'}a_{11'} + x_{12'}a_{12'} + x_{21'}a_{21'} + x_{22'}a_{22'}$$

制約

$$x_{i1'} + x_{i2'} \leq 1 \ \forall i \in \{1, 2\}$$

$$x_{1j} + x_{2j} \leq 1 \ \forall j \in \{1', 2'\}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}\ \forall i \in \{1,2\}, j \in \{1',2'\}$$

整数条件を緩和 → 線形計画問題

$$\max_{x_{ij}} \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1'}^{2'} x_{ij} a_{ij}$$

（緩和された）制約

$$x_{i1'} + x_{i2'} \leq 1\ \forall i \in \{1,2\}$$

$$x_{1j} + x_{2j} \leq 1\ \forall j \in \{1',2'\}$$

$$0 \leq x_{ij} \leq 1\ \forall i \in \{1,2\}, j \in \{1',2'\}$$

- この線形計画問題の解が整数解であることが知られている．
- 一般的な割当問題においては，線形計画問題に関する双対定理より，コアが非空であることが示せる．