シャープレイ値（１）

河崎　亮

大学院社会理工学研究科　社会工学専攻

１２月１５日

前回まで

- 仁：不満の均等化という観点で公平な配分（一点解）
- 今回：シャープレイ値
- → 貢献度 からみて公平な一点解

貢献度とシャープレイ値

定義 1.

プレイヤー i の提携 S（ただし，$i \notin S$）に対する貢献度は以下の式で与えられる．

$$v(S \cup \{i\}) - v(S)$$

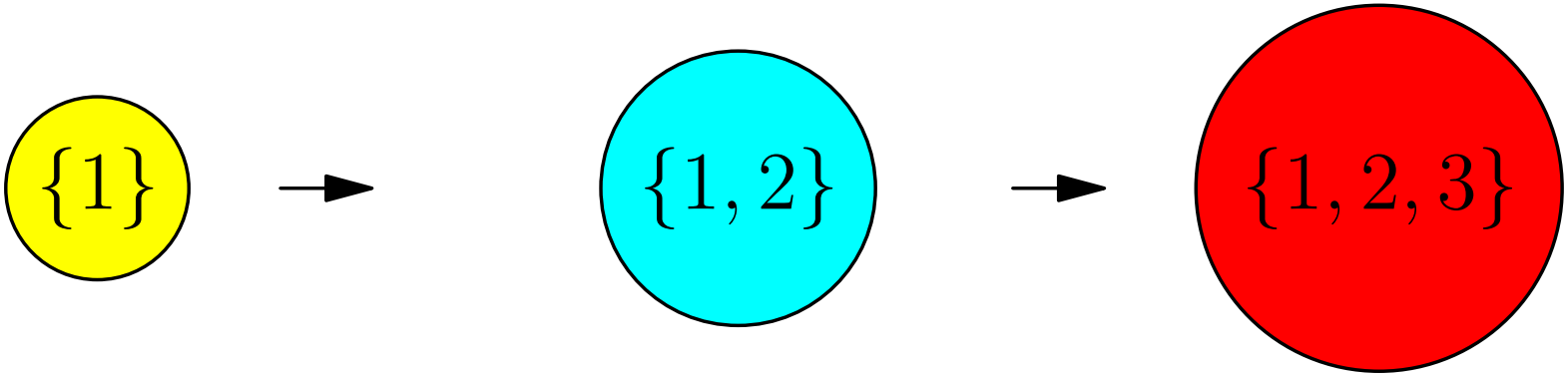
貢献度は提携 S によって変わる．プレイヤー i の特性関数形ゲームにおける貢献度を測るには，「平均」（期待値）をとる．

シャープレイ値：貢献度の期待値

順列

- 優加法性 $\rightarrow$ 全体提携 N が形成されると仮定した.
- N が形成されるプロセスで提携が組まれた順番ないしは順列をみる.
- 例： $N = \{1, 2, 3\}$
  1. $\{1\} \rightarrow \{1, 2\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ ($1 \leftarrow 2 \leftarrow 3$ と記す)
  2. $\{2\} \rightarrow \{1, 2\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ ($2 \leftarrow 1 \leftarrow 3$ と記す)

全体提携が形成されるプロセス（１）



（左）　$\{1\}$ がまず形成され，

（中）　その後プレイヤー２が加わることにより $\{1,2\}$ が形成され，

（右）　その後プレイヤー３が加わることにより $\{1,2,3\}$ が形成される．

全体提携が形成されるプロセス（２）

先ほどのプロセスにおいて，各プレイヤーが加わったときの貢献度が計算できる．

プレイヤー１の貢献度:	$v(\{1\}) - v(\emptyset)$
プレイヤー２の貢献度:	$v(\{1,2\}) - v(\{1\})$
プレイヤー３の貢献度:	$v(\{1,2,3\}) - v(\{1,2\})$

貢献度の期待値（1）

- この順番が同確率 $(1/n!)$ でランダムに起こると仮定する．
- 全部で $n!$ 通りの順番，一つの順番が実現される確率 $= \frac{1}{n!}$.
- この状況の下で，貢献度の期待値を計算し，シャープレイ値を求める．

貢献度の期待値（２）

シャープレイ値の 計算方法 のあらすじ：

1. N が形成される全ての順列に対して各プレイヤーの貢献度を計算する．
2. 1. で求めた貢献度の和を各プレイヤーごとに計算する．
3. 各プレイヤーに対し，2. で求めた和を $n!$ で割る．
4. 3. で求めた商をプレイヤー 1 から n まで並べた n 次元ベクトルがシャープレイ値である．

シャープレイ値の計算方法：３人の場合（１）

次のような表を用意する.

	１の貢献度	２の貢献度	３の貢献度
$1 \leftarrow 2 \leftarrow 3$			
$1 \leftarrow 3 \leftarrow 2$			
$2 \leftarrow 1 \leftarrow 3$			
$2 \leftarrow 3 \leftarrow 1$			
$3 \leftarrow 1 \leftarrow 2$			
$3 \leftarrow 2 \leftarrow 1$			

シャープレイ値の計算方法：３人の場合（２）

表の中身

	1 の貢献度	2 の貢献度	3 の貢献度
$1 \leftarrow 2 \leftarrow 3$	$v(1) - v(\emptyset)$	$v(12) - v(1)$	$v(123) - v(12)$
$1 \leftarrow 3 \leftarrow 2$	$v(1) - v(\emptyset)$	$v(123) - v(13)$	$v(13) - v(1)$
$2 \leftarrow 1 \leftarrow 3$	$v(12) - v(2)$	$v(2) - v(\emptyset)$	$v(123) - v(12)$
$2 \leftarrow 3 \leftarrow 1$	$v(123) - v(23)$	$v(2) - v(\emptyset)$	$v(23) - v(2)$
$3 \leftarrow 1 \leftarrow 2$	$v(13) - v(3)$	$v(123) - v(13)$	$v(3) - v(\emptyset)$
$3 \leftarrow 2 \leftarrow 1$	$v(123) - v(23)$	$v(23) - v(3)$	$v(3) - v(\emptyset)$

注意：ここでスペースの都合上，"$\{\}$" や"$,$" は省略している．
例えば $v(12) = v(\{1, 2\})$ である．

例 1 のシャープレイ値（1）

$$N = \{1, 2, 3\}$$

$$v(\{1, 2, 3\}) = 1$$

$$v(\{1, 2\}) = v(\{1, 3\}) = v(\{2, 3\}) = 1$$

$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$$

事例６－１のシャープレイ値（２）

	１の貢献度	２の貢献度	３の貢献度
$1 \leftarrow 2 \leftarrow 3$	0	1	0
$1 \leftarrow 3 \leftarrow 2$	0	0	1
$2 \leftarrow 1 \leftarrow 3$	1	0	0
$2 \leftarrow 3 \leftarrow 1$	0	0	1
$3 \leftarrow 1 \leftarrow 2$	1	0	0
$3 \leftarrow 2 \leftarrow 1$	0	1	0

事例６－１のシャープレイ値（３）

	１の貢献度	２の貢献度	３の貢献度
$1 \leftarrow 2 \leftarrow 3$	0	1	0
$1 \leftarrow 3 \leftarrow 2$	0	0	1
$2 \leftarrow 1 \leftarrow 3$	1	0	0
$2 \leftarrow 3 \leftarrow 1$	0	0	1
$3 \leftarrow 1 \leftarrow 2$	1	0	0
$3 \leftarrow 2 \leftarrow 1$	0	1	0
合計	2	2	2
シャープレイ値	1/3	1/3	1/3

事例６－２のシャープレイ値

$$N = \{1, 2, 3\}$$

$$v(\{1, 2, 3\}) = 5$$

$$v(\{1, 2\}) = 2, v(\{1, 3\}) = 5, v(\{2, 3\}) = 0$$

$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$$

同様な手順でシャープレイ値が $(17/6, 1/3, 11/6)$ であることが確かめられる.

事例６－３のシャープレイ値（１）

$$N = \{A, B, C\}$$

$$v(\{A, B, C\}) = 20$$

$$v(\{A, B\}) = 6, v(\{A, C\}) = 0, v(\{B, C\}) = 8$$

$$v(\{A\}) = v(\{B\}) = v(\{C\}) = 0$$

事例６－３のシャープレイ値（２）

	A の貢献度	B の貢献度	C の貢献度
$A \leftarrow B \leftarrow C$	0	6	14
$A \leftarrow C \leftarrow B$	0	20	0
$B \leftarrow A \leftarrow C$	6	0	14
$B \leftarrow C \leftarrow A$	12	0	8
$C \leftarrow A \leftarrow B$	0	20	0
$C \leftarrow B \leftarrow A$	12	8	0
合計	30	54	36
シャープレイ値	$30/6 = 5$	$54/6 = 9$	$36/6 = 6$
費用の負担分	$70 - 5 = 65$	$55 - 9 = 46$	$65 - 6 = 59$

（単位：１００万円）

シャープレイ値と全体合理性

シャープレイ値は全体合理性を満たす.

$\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$：シャープレイ値

	1 の貢献度	2 の貢献度	3 の貢献度
$1 \leftarrow 2 \leftarrow 3$	$v(1) - v(\emptyset)$	$v(12) - v(1)$	$v(123) - v(12)$
$1 \leftarrow 3 \leftarrow 2$	$v(1) - v(\emptyset)$	$v(123) - v(13)$	$v(13) - v(1)$
$2 \leftarrow 1 \leftarrow 3$	$v(12) - v(2)$	$v(2) - v(\emptyset)$	$v(123) - v(12)$
$2 \leftarrow 3 \leftarrow 1$	$v(123) - v(23)$	$v(2) - v(\emptyset)$	$v(23) - v(2)$
$3 \leftarrow 1 \leftarrow 2$	$v(13) - v(3)$	$v(123) - v(13)$	$v(3) - v(\emptyset)$
$3 \leftarrow 2 \leftarrow 1$	$v(123) - v(23)$	$v(23) - v(3)$	$v(3) - v(\emptyset)$
ϕ	$\frac{(\text{列 1 合計})}{3!}$	$\frac{(\text{列 2 合計})}{3!}$	$\frac{(\text{列 3 合計})}{3!}$

各行の和 $= v(\{1, 2, 3\})$. したがって,

$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = 3! \cdot \frac{v(\{1,2,3\})}{3!} = v(\{1, 2, 3\})$.

シャープレイ値と個人合理性

優加法性 を満たすゲームにおいては個人合理性も満たす：

	1 の貢献度	2 の貢献度	3 の貢献度
$1 \leftarrow 2 \leftarrow 3$	$v(1) - v(\emptyset)$	$v(12) - v(1)$	$v(123) - v(12)$
$1 \leftarrow 3 \leftarrow 2$	$v(1) - v(\emptyset)$	$v(123) - v(13)$	$v(13) - v(1)$
$2 \leftarrow 1 \leftarrow 3$	$v(12) - v(2)$	$v(2) - v(\emptyset)$	$v(123) - v(12)$
$2 \leftarrow 3 \leftarrow 1$	$v(123) - v(23)$	$v(2) - v(\emptyset)$	$v(23) - v(2)$
$3 \leftarrow 1 \leftarrow 2$	$v(13) - v(3)$	$v(123) - v(13)$	$v(3) - v(\emptyset)$
$3 \leftarrow 2 \leftarrow 1$	$v(123) - v(23)$	$v(23) - v(3)$	$v(3) - v(\emptyset)$
ϕ	$\frac{(\text{列 1 合計})}{3!}$	$\frac{(\text{列 2 合計})}{3!}$	$\frac{(\text{列 3 合計})}{3!}$

第 1 列の各セル $\geq v(\{1\}) \rightarrow \phi_1 \geq v(\{1\})$

第 2 列の各セル $\geq v(\{2\}) \rightarrow \phi_2 \geq v(\{2\})$.

第 3 列の各セル $\geq v(\{3\}) \rightarrow \phi_3 \geq v(\{3\})$.

表の計算に対応するシャープレイ値

今までの計算方法の一般化：

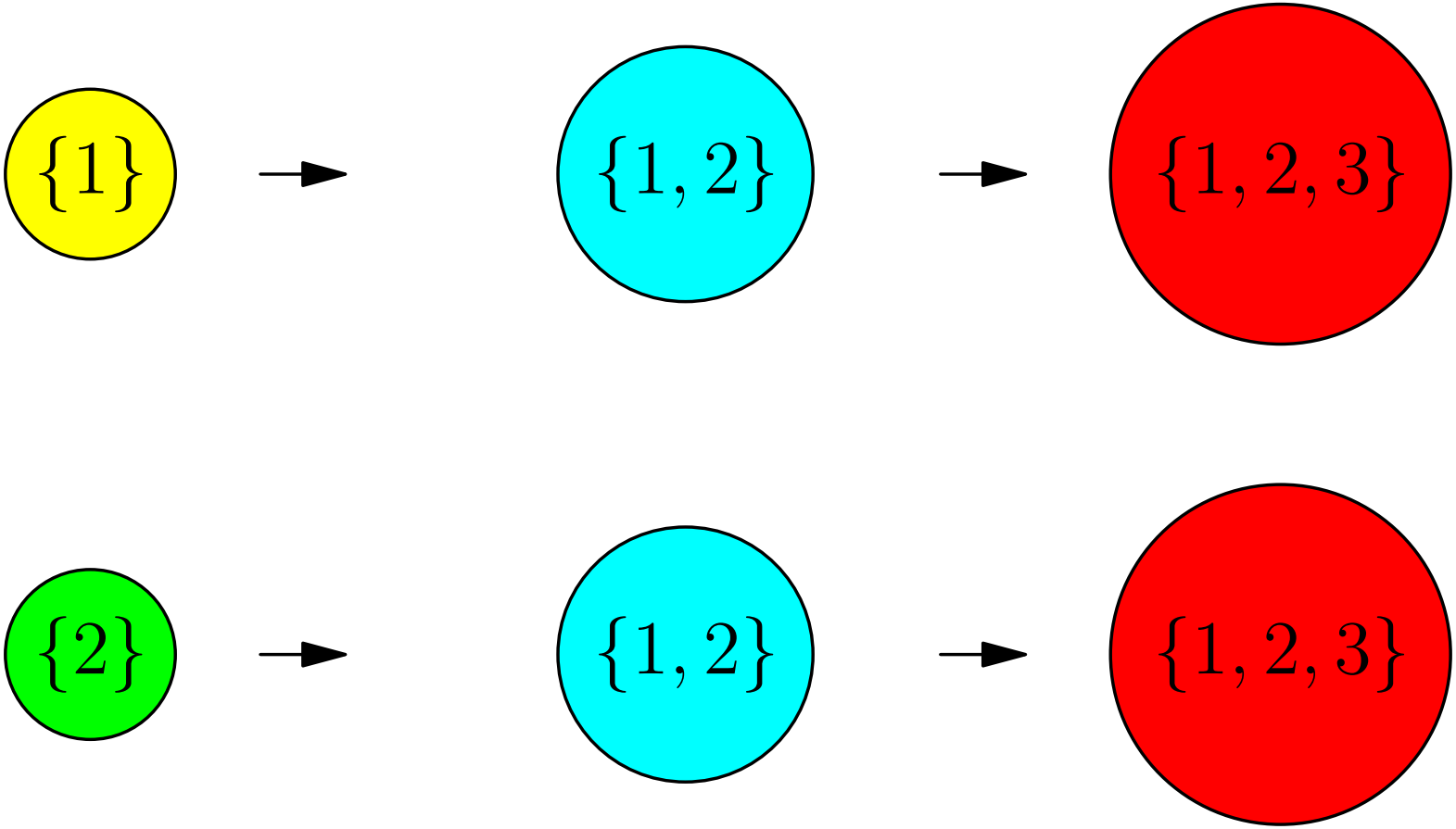
シャープレイ値 $\phi = (\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n)$ は以下の式により求まる.

$$\phi_i = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi} v(P^{\pi,i} \cup \{i\}) - v(P^{\pi,i})$$

- Π: N の順列全体の集合
- $P^{\pi,i}$: 順列 π における i の先行者の集合

実際に計算するのは手間がかかる $\rightarrow$ 別の公式

順列ではなく提携でみる



上の二つの順列は異なるが，それぞれの順列に対しプレイヤー３の貢献度は $v(\{1,2,3\}) - v(\{1,2\})$.

シャープレイ値の公式

シャープレイ値 $\phi = (\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n)$ は以下の式で与えられる.

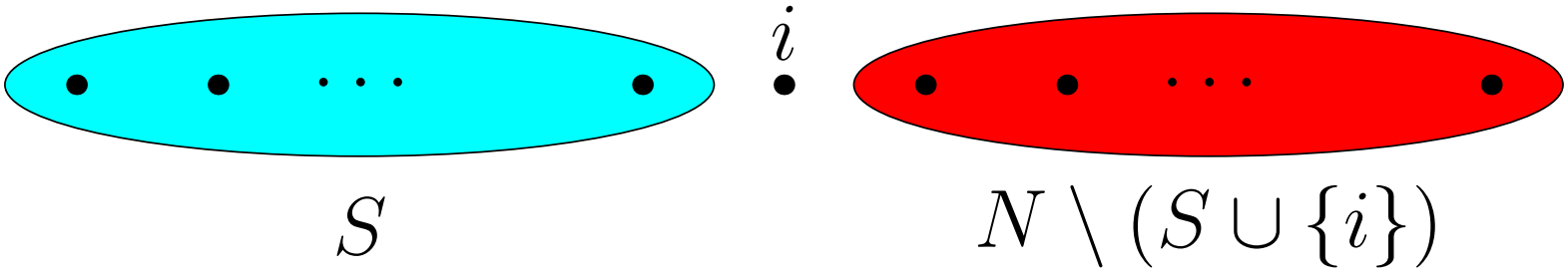
$$\phi_i = \frac{1}{n!} \sum_{S \subseteq N, i \notin S} s!(n-s-1)! \left(v(S \cup \{i\}) - v(S)\right) \quad (1)$$

ただし,

- s : 提携 S の人数
- n : プレイヤーの集合 N の人数

式 (1) の導出

$v(S \cup \{i\}) - v(S)$ の項が現れる順列の数を求める．



- i の前に S が形成される回数は $s!$
- i の後に $N \setminus (S \cup \{i\})$ が形成される回数は $(n-s-1)!$
- よって，この組合せは $s!(n-s-1)!$ 回起こる．

シャープレイ値の公理系による特徴付け

- ナッシュ交渉解と同様にシャープレイ値も公理系により特徴づけられる.
- 以下の４つの公理を満たす唯一の（一点）解である.
  - 全体合理性
  - ナルプレイヤーに関する性質
  - 対称なプレイヤーに関する性質
  - ゲームの和に関する性質

(N, v) の解を $x^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$ とする．４つの公理はこの x^* に関する性質について述べている.

全体合理性とナルプレイヤー

全体合理性:

$$\sum_{i \in N} x_i^* = v(N)$$

$i \in N$ がナルプレイヤー：$v(S \cup \{i\}) = v(S)\ \forall S \subseteq N \setminus \{i\}$

ナルプレイヤーに関する性質：i がナルプレイヤー $\Rightarrow$ $x_i^* = 0$.

対称なプレイヤーとゲームの和

- $i \in N$ と $j \in N$ が対称：$i \notin S, j \notin S$ となる任意の提携 S に対し，$v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$ が成り立つ．

> 対称なプレイヤーに関する性質：二人のプレイヤー i と j が対称 $\Rightarrow x_i^* = x_j^*$

(N, v) と (N, u) の和：任意の提携 S に対し
$w(S) = v(S) + u(S)$ と定義される特性関数形ゲーム (N, w)．

> ゲームの和に関する性質：(N, v) と (N, u) の解をそれぞれ x^* と y^* とおく．(N, w) を (N, v) と (N, u) の和とし，そのゲームの解を z^* とする．このとき，
>
> $$z_i^* = x_i^* + y_i^* \ \forall i \in N$$

シャープレイ値の公理系

定理 1.

以下の４つの性質（公理）を満たす解はシャープレイ値ただ一つである.

- 全体合理性
- ナルプレイヤーに関する性質
- 対称なプレイヤーに関する性質
- ゲームの和に関する性質

シャープレイ値は４つの性質を満たすことは式 (1) などを使い確かめられる.

シャープレイ値とコア・仁との関係性

- シャープレイ値とコア
  - シャープレイ値 $\notin$ コア：例１，事例６－２
  - シャープレイ値 $\in$ コア：事例６－３，(凸ゲーム)
- シャープレイ値と仁
  - シャープレイ値 $\neq$ 仁：事例６－２，事例６－３
  - シャープレイ値 $=$ 仁：例１，(対称ゲーム)

凸ゲーム：$S \subseteq T \Rightarrow$ (S への貢献度) $\leq$ (T への貢献度).
対称ゲーム：提携値が提携の人数にのみ依存する.

復習

ナッシュ交渉解：テキスト pp. 137-158
特性関数形ゲームとコア：テキスト pp. 159-179
仁：テキスト pp. 180-187
シャープレイ値： テキスト pp. 187-194