仁（１２月８日）

I. 記号

1. (N, v)：特性関数形ゲーム
2. A：配分全体の集合
3. $e(S, x) = v(S) - \sum_{i \in S} x_i$：提携 S の配分 x に対する <u>不満</u>
4. $\theta(x)$：配分 x に対する各提携の不満量を大きいものから順番に並べたベクトル.
5. ただし，4. のベクトルの中で $e(N, x)$ と $e(\emptyset, x)$ に対応する成分は考えない（全ての配分 x に対して $e(N, x) = e(\emptyset, x) = 0$.）
6. $\theta(x) = (\theta_1(x), \theta_2(x), \cdots, \theta_{2^n-2}(x))$, $\theta_1(x) \geq \theta_2(x) \geq \cdots \geq \theta_{2^n-2}(x)$.

II. 仁の考え方

- 上のベクトル $\theta(\cdot)$ 使い配分に対する不満を比較，不満の均等化を目指す
- まず最大の不満（$\theta_1(x)$）を最小化する配分 x を探す.
  1. このような配分が一つに定まれば $\rightarrow$ stop.
  2. 一つでない場合 $\rightarrow$　次へ進む
- 残りの配分の中，次に大きい不満量（$\theta_2(x)$）を最小化する配分を探す.
  1. このような配分が一つに定まれば $\rightarrow$ stop.
  2. 一つでない場合 $\rightarrow$　次へ進む
- このプロセスを繰り返す．最終的に <u>必ず一つ</u> の配分が得られる $\rightarrow$ <u>仁</u> と呼ぶ.

III. 仁の数学的定義と性質

- $x, y \in A$ とする．次の条件をみたす $k (1 \leq k \leq 2^n - 2)$ が存在するとき，配分 x は配分 y より <u>受容的</u>[1] であるといい，$x \gg y$ と記す.

$$\boxed{\theta_l(x) = \theta_l(y)\ \forall l \in \{1, 2, \cdots, k-1\},\ \theta_k(x) < \theta_k(y)}$$

[1] テキストでは，許容的とよんでいる.

- 以下で定義されている集合 $\mathcal{N}$ を <u>仁</u> とよぶ.

$$\mathcal{N} = \{x \in A : y \gg x \text{ をみたす } y \in A \text{ が存在しない.}\}$$

このとき，以下のことが示せる.

（コアの部分集合） $C \neq \emptyset$ ならば，$\mathcal{N} \subseteq C$ である.

（非空性） $\mathcal{N} \neq \emptyset$

（一点集合） $\mathcal{N}$ は <u>一点集合</u> である．$x \neq y$ となる $x, y \in A$ が同時に $x \in \mathcal{N}, y \in \mathcal{N}$ を <u>みたすことがない.</u>

IV. 仁の非空性の証明の準備：$\theta(x)$ の別表現

- $\theta(x) = (\theta_1(x), \theta_2(x), \cdots, \theta_{2^n-2}(x))$ は配分 x に対する各提携（ただし全体提携 N と空集合 $\emptyset$ は除く）の不満の高い順番で並べられているベクトル.
- 一般的な式：

$$\theta_t(x) = \max_{\mathscr{R} \subseteq 2^N \setminus \{N, \emptyset\}, |\mathscr{R}| = t} \left(\min_{S \in \mathscr{R}} e(S, x) \right). \tag{1}$$

- 記号の説明
  - $2^N \setminus \{N, \emptyset\}$：$N$ と $\emptyset$ 以外の提携の集合.
  - $|\mathscr{R}|$：$\mathscr{R}$ の中の要素数．この場合は，$\mathscr{R}$ に属している提携の数.

V. 仁の非空性

- 任意の $t = 1, 2, \cdots, 2^n - 2$ について $\theta_t(\cdot)$ は x の連続関数である.
  - $e(S, x) = v(S) - \sum_{i \in S} x_i$ は $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の連続関数.
  - $\theta_t(\cdot)$ は連続関数の有限個の max と min により定義 $\rightarrow$ $\theta_t(\cdot)$ 自身も連続.

- 配分の集合 A はコンパクト（有界かつ閉）集合である．
- ワイエルシュトラスの定理（１０月２７日資料参照）より，以下の最小化問題の解は存在する．

$$\min_{x \in A} \theta_1(x)$$

この問題の解の集合 $\to A_1$ と記す．少なくとも解は一つ存在するため，$A_1 \neq \emptyset$ が成り立つ．

- A_1 は閉集合である．また，A は有界集合であり $A_1 \subseteq A$ より A_1 も有界である．したがって，A_1 もコンパクト集合である．
- 再び，ワイエルシュトラスの定理より，以下の最小化問題の解は存在する．

$$\min_{x \in A_1} \theta_2(x)$$

この問題の解を A_2 とおく．$A_2 \neq \emptyset$ であり，A_2 がコンパクト集合であることも A_1 のときと同様に示せる．

- 一般的に $t = 2, \cdots, 2^n - 2$ に対して集合 A_t を次のように定義．

$$A_t = \{x \in A_{t-1} | \theta_t(x) = \min_{y \in A_{t-1}} \theta_t(y)\}$$

- 前の議論と同様，$A_t \neq \emptyset \ \forall t = 1, 2, \cdots, 2^n - 2$．特に，$A_{2^n-2} \neq \emptyset$.
- $A_{2^n-2} \subseteq \mathcal{N}$ である．したがって，$\mathcal{N} \neq \emptyset$.

VI. 仁が一点集合であることの証明の流れ

- 背理法で示す：$x, y \in \mathcal{N}$ となる $x \neq y$ が存在したとする．
- $z \in \mathcal{R}^n$ を $z = \frac{x+y}{2}$ と定義する．成分ごとに書くと $z_i = \frac{x_i+y_i}{2}$, $\forall i = 1, 2, \cdots, n$. $x, y \in A$ より $z \in A$ であることが確かめられる．
- $x \in \mathcal{N}$, $y \in \mathcal{N}$ より $\theta(x) = \theta(y)$.
- $z \gg x$ および $z \gg y$ であることが示される．これは $x \in \mathcal{N}$ や $y \in \mathcal{N}$ と矛盾する．