協力ゲーム理論練習問題 4

1. 事例 6-3 の状況を定式化した，以下の ”特性関数形ゲーム”を考える．この特性関数は，各提携が形成されたときの総費用にマイナスの符号を付け加えたものを提携値として与えている．

$$N = \{A, B, C\}$$

$$v(\{A, B, C\}) = -170$$

$$v(\{A, B\}) = -119, v(\{A, C\}) = -135, v(\{B, C\}) = -112$$

$$v(\{A\}) = -70, v(\{B\}) = -55, v(\{C\}) = -65$$

   (a) 上で定義されたゲームが優加法性を満たすかどうかを確かめよ．
   (b) 上で定義されたゲームが単調性を満たすかどうかを確かめよ．
   (c) この問題のゲームが講義ないしはテキストで定義された特性関数形ゲームと戦略上同等であることを示せ．

2. 優加法性をみたす 3 人特性関数形ゲームに関して $N = \{1, 2, 3\}$ としたとき，以下の条件がコアが非空になるための必要十分条件であることを示せ．

$$v(\{1, 2\}) + v(\{1, 3\}) + v(\{2, 3\}) \leq 2v(\{1, 2, 3\})$$

3. (N, v) が優加法性を満たし，任意の提携 S に対し $v(S) \geq 0$ が成り立つのであれば，(N, v) は単調性を満たすことを示せ．

4. 練習問題 3 の 1 (a) と (b) が戦略上同等であることを示せ．

5. （投票ゲーム）この問題では投票ゲームと呼ばれる特性関数形ゲームについて考察する．

   - 特性関数形ゲーム (N, v) が $S \neq N$ なる任意の提携 S に対し $v(S) = 0$ または $v(S) = 1$ が成り立ち，$v(N) = 1$ を満たすとき (N, v) を <u>単純ゲーム</u> と呼ぶ．
   - 単純ゲーム (N, v) がさらに次の二つの条件を満たすとき (N, v) を <u>投票ゲーム</u> と呼ぶ．

     (i) 任意の $S \subseteq T$ を満たす二つの提携 S と T に対し $v(S) \leq v(T)$.（単調性）

     (ii) $v(S) = 1$ ならば $v(N \setminus S) = 0$.
   - 投票ゲームにおいて $v(S) = 1$ となる提携 S を <u>勝利提携</u> と呼ぶ．
   - ある $i \in N$ が全ての勝利提携に含まれているとき，i を <u>拒否権を持つプレイヤー</u> と呼ぶ．拒否権を持つプレイヤーの集合を V とおく．

- $\{i\}$ が勝利提携であるとき，i を <u>独裁者</u> と呼ぶ.

(a) 提携 S が勝利提携であるとする．$S \subseteq T$ を満たす提携 T も勝利提携になることを示せ.

(b) 拒否権を持つプレイヤーの集合 V を $V = \bigcap\{S|v(S) = 1\}$ と表すことができることを簡単に説明せよ.（証明を与える必要はない.）

(c) 次の命題を考える：「任意の投票ゲーム (N, v) において $v(V) = 1$ が成り立つ.」この命題が真であるならば証明し，偽であれば反例となる投票ゲームを挙げよ.

(d) $V = \emptyset$ のとき，コアが空集合であることを示せ.

(e) $V \neq \emptyset$ のとき，以下の集合がコアであることを示せ.

$$C = \{x \in A | x_i = 0,\ \forall i \in N \setminus V\}$$

即ち，以下の二つの事柄が成り立つことを証明せよ.

i. $x \in C$ ならば $x_i = 0\ \forall i \in N \setminus V$.

ii. $x_i = 0\ \forall i \in N \setminus V$ を満たす任意の $x \in A$ に対し，$x \in C$ が成り立つ.