協力ゲーム理論練習問題 2

1. 企業 1 と企業 2 はそれぞれ生産をするためには二種類の生産要素 L と K を必要とする．企業 1 の生産要素 L と K の投入量をそれぞれ L_1 と K_1 としたとき，企業 1 の利潤は $(L_1)^\alpha(K_1)^{1-\alpha}$ で与えられたとする．また，企業 2 の生産要素 L と K の投入量をそれぞれ L_2 と K_2 としたとき，企業 2 の利潤は $(L_2)^\beta(K_2)^{1-\beta}$ とする．ただし，$0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1$ と仮定する．企業 1 は初期保有として投入物 L を $\bar{L} > 0$ 所持をしているが投入物 K は所持していない．一方，企業 2 は初期保有として投入物 L を所持していないが，投入物 K を $\bar{K} > 0$ 所持している．

   (a) この問題に対応する交渉問題の基準点 d を求めよ．

   (b) 交渉問題の実現可能集合 R を以下のように <u>定義</u> する．

$$
\begin{aligned}
R = \{(u_1, u_2) \in \mathcal{R}^2 | u_1 \leq (L_1)^\alpha (K_1)^{1-\alpha}, u_2 \leq (L_2)^\beta (K_2)^{1-\beta}, \\
L_1 + L_2 = \bar{L}, K_1 + K_2 = \bar{K}, L_1 \geq 0, L_2 \geq 0, K_1 \geq 0, K_2 \geq 0 \\
\text{を満たす } (L_1, L_2, K_1, K_2) \text{ が存在する} \}
\end{aligned}
$$

   R の解釈を与えよ.（補足：この R は凸集合でありコンパクト集合であることが確かめられる.）

   (c) 交渉問題のナッシュ交渉解に対応するそれぞれの企業の投入量 L_1, L_2, K_1, K_2 を求めよ．また，$\alpha = \beta$ の場合はどうなるかも答えよ．

2. 集合 $R \subset \mathcal{R}^2$ が凸集合であるとし，$(d_1, d_2) \in R$ を仮定する．このとき，講義資料で定義されている集合 R^* と R' がそれぞれ凸集合であることを示せ.

3. ナッシュ交渉解が対称性を満たすことを示せ.

4. 以下の交渉解 (a),(b) が

   (公理 1) パレート最適性

   (公理 2) 対称性

   (公理 3) 正アフィン変換からの独立性

   (公理 4) 無関係な結果からの独立性

   の内，どの公理を満たしているかを確かめよ．公理を満たしている場合は証明し，満たしていない場合は反例となる交渉問題を挙げ，反例になっていることを証明せよ．

   (a) $f(R, d) = d$.（各交渉問題に交渉の基準点を与える交渉解）

(b) $g(R,d) = (u_1', u_2')$. ただし，$u_1' = \max\{u_1 : (u_1, u_2) \in R\}$, $u_2' = \max\{u_2 : (u_1', u_2) \in R\}$.（$u_1'$ はプレイヤー 1 が得られる実現可能な組の中で最大な取り分であり，プレイヤー 1 にとって最大な利得を実現できる組の中でプレイヤー 2 にとって最大な値が u_2' である.）