ディジタル信号処理
（XII）

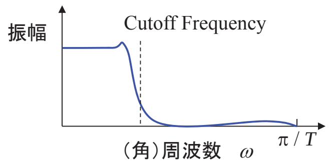
学術国際情報センター
山口雅浩

ディジタルフィルタ

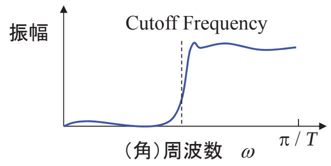
- 目的
  - ノイズ低減
  - 劣化した信号の復元（デコンボリューション）
  - 特徴抽出
  - スペクトルの分析
  - 符号化
  - パターン認識
- 実装方法
  - ソフト、ハード
  - FFTの利用、FIR、IIR
- 利用分野の例
  - AV機器、制御システム、センサー、
  - 通信システム（無線・有線）、画像システム、医用診断機器. . .

- FIR, IIR フィルタの回路構成と差分方程式
- FIRフィルタはどのようにして設計するか？
- 直線位相フィルタとは何か？
- IIRフィルタの設計方法の考え方
- ダウンサンプリング・アップサンプリング
- フィルタバンクとは何か？

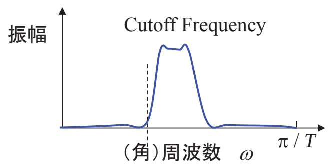
周波数フィルタ



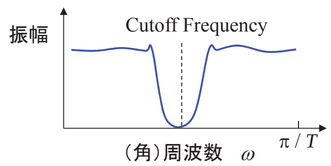
低域通過フィルタ（ Lowpass filter ）



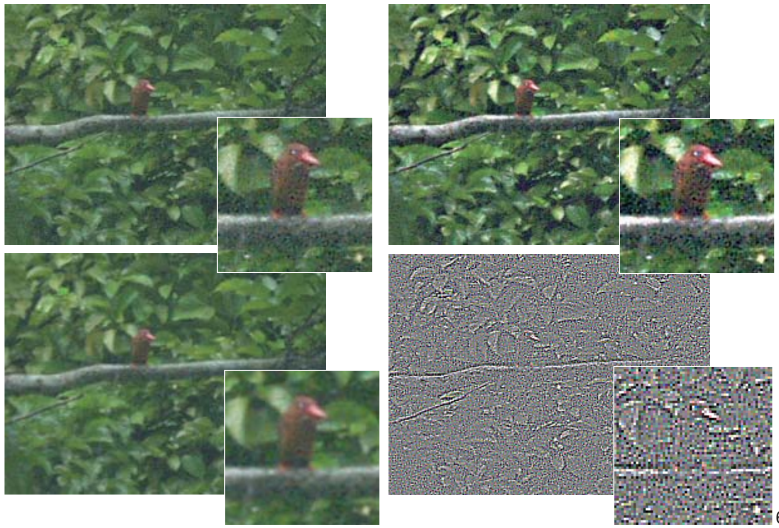
高域通過フィルタ（ Highpass filter ）



帯域通過フィルタ（ Bandpass filter ）



帯域阻止フィルタ（ Band Elimination filter ）



線形シフト不変システムによるディジタルフィルタ

- 離散たたみ込み演算

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)h(k)$$

$h(n)$ ： インパルス応答

- 離散時間フーリエ変換

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Omega n}$$

$(\Omega = \omega T)$

ディジタルフィルタの
周波数特性

$$Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega) \qquad H(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\Omega n}$$

FIRフィルタとIIRフィルタ

- FIRフィルタ（非巡回形，非再帰形）
  - 差分方程式 $y(k) = \sum_{m=0}^{M} a_m x(k-m)$
  - 伝達関数 $H(z) = \sum_{m=0}^{M} a_m z^{-m}$
- IIRフィルタ（巡回形，再帰形）※
  - 差分方程式 $y(k) = \sum_{m=0}^{M} a_m x(k-m) - \sum_{n=1}^{N} b_n y(k-n)$
  - 伝達関数 $H(z) = \dfrac{\sum_{m=0}^{M} a_m z^{-m}}{1 + \sum_{n=1}^{N} b_n z^{-n}}$

※再帰形のFIRフィルタもありえる

FIRフィルタの構成

- インパルス応答 $h(k)$

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=0}^{M} h(k)x(n-k)$$

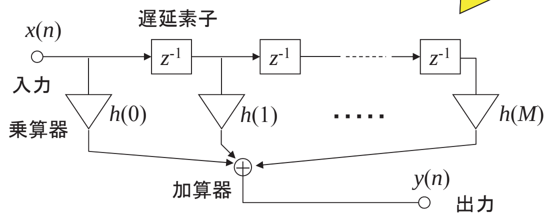
- z 変換すると、

$$Y(z) = H(z)X(z) = \sum_{n=0}^{M} h(n)z^{-n}X(z)$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{M} h(n)z^{-n}$$

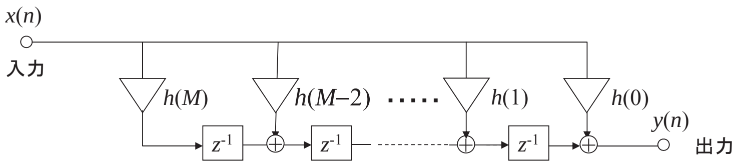
- 極は $z = 0$ のみ：常に安定

直接形構成



直接形構成（転置形）

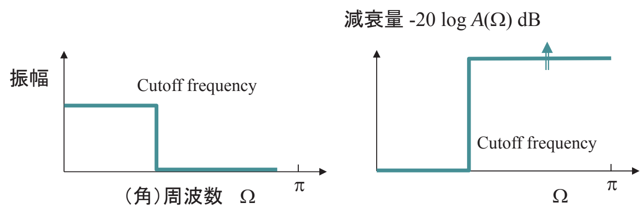
$$H(z)=\sum_{n=0}^{M} h(n)z^{-n}$$
$$= h(0)+z^{-1}[h(1)+z^{-1}\{h(2)+z^{-1}(h(3)+\cdots)\}]$$



・・・直接形構成の入力と出力を入れ替えた形

簡単なFIRディジタルフィルタの設計例

- 所望の周波数特性 $H_A(\Omega)=A(\Omega)$
  - まず、位相特性を0とする
  - → 全ての周波数で遅延が0 → 波形の歪が無い
  - → $H_A(\Omega)$ は実数
- まず、振幅のみを変調するフィルタを考える （零位相特性）
- 例：理想的なLPF
  - 振幅特性 $A(\Omega)$



インパルス応答は $H_A(\Omega)$ の逆フーリエ変換により求まる。

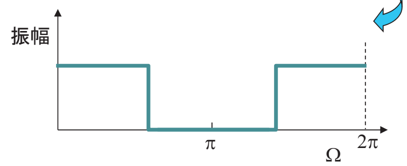
- インパルス応答は実数 → $H_A(-\Omega)=H_A^*(\Omega)=H_A(\Omega)$

$$H_A(-\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_A(n)e^{-j(-\Omega)n}=\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}h_A(n)e^{-j\Omega n}\right]^*=H_A^*(\Omega)$$

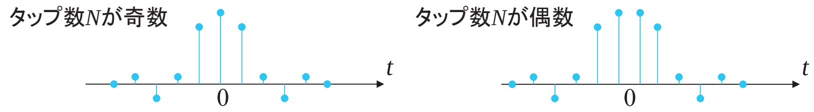
- $H_A(\Omega)$ は実数：実数の逆フーリエ変換は $h_A(n)=h_A(-n)$
  （$H_A(\Omega)$ も $h_A(n)$ も偶関数）

$$h_A(-n)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}H_A(\Omega)e^{-j\Omega(-n)}=\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}H_A(\Omega)e^{-j\Omega n}d\Omega\right]^*=h_A^*(n)=h_A(n)$$

- $H_A(\Omega)$ は周期関数なので、 このような形になる



インパルス応答 $h_A(n)$ が偶関数



→ 因果的でない

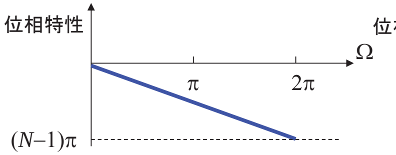
- そこで
  $h_A(n)$を、全て $n\ge 0$ の領域に収まるようにシフト
  - N が奇数のとき $(N-1)/2$ だけ右にシフト
    $h(n)=h_A(n-(N-1)/2)$
  - N が偶数のとき $N/2$だけ右にシフト
    $h(n)=h_A(n-N/2)$
- $h_A(n)$ が有限長であれば、$h(n)$ は因果的なシステムとなる
  - Nが奇数のとき、
    $h(n)=h(N-n-1)$

インパルス応答$h(n)$：ゼロ位相特性を持つ$h_A(n)$を時間軸でシフトしたもの

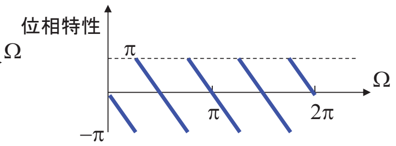
- インパルス応答$h(n)$を持つシステムの周波数応答

$$H(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\Omega n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_A(n-(N-1)/2)e^{j\Omega n}$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_A(n)e^{-j\Omega n}\; e^{-j(N-1)\Omega/2}=H_A(\Omega)\cdot e^{-j(N-1)\Omega/2}$$

- 振幅特性： $|H(\Omega)|=A(\Omega)$
- 位相特性： $-(N-1)\,\Omega/2$



（実際には位相特性は−π~πの範囲で折り返される）



⇒ 直線位相特性

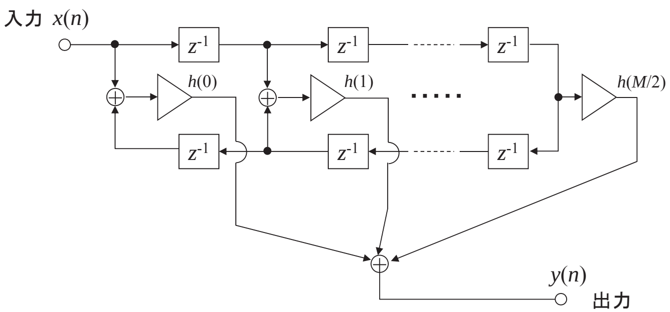
- 直線位相を持つシステムでは、

  $h(n)=h(M-n)$

  を利用することで、乗算器の個数を半減できる

・・・その意味は？

教科書p.158



前述の例より、

直線位相特性を持つシステム

＝ 実数で偶関数のインパルス応答＋一定の遅延

- 直線位相特性を持つシステムの伝達関数

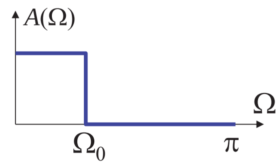
$$H(z)=h(0)+h(1)z^{-1}+h(2)z^{-2n}+\cdots+h(N-1)z^{-M}$$
$$=h(0)+h(1)z^{-1}+h(2)z^{-2n}+\cdots+h(2)z^{-(M-2)}+h(1)z^{-(M-1)}+h(0)z^{-M}$$

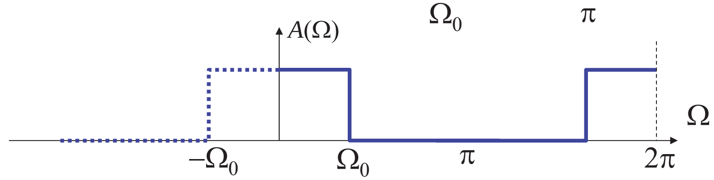
$$=h(0)(1+z^{-M})+h(1)(z^{-1}+z^{-(M-1)})+h(2)(z^{-2n}+z^{-(M-2)})+\cdots+h(M/2)z^{-M/2}$$

乗算の回数 $M+1$ → $M/2$ に削減

具体例（LPFの設計）

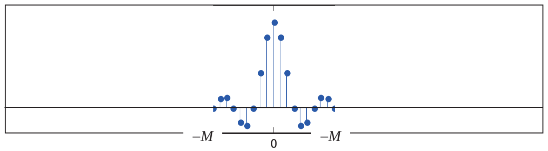
$$A(\Omega)=\begin{cases}1 & |\Omega|<\Omega_0\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$



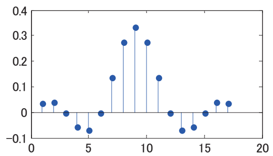


$$h_A(n)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}A(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}A(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega_0}^{\Omega_0}e^{j\Omega n}d\Omega=\frac{\sin\Omega_0 n}{\pi n}$$

$$h_A(n) = \frac{\sin \Omega_0 n}{\pi n}$$



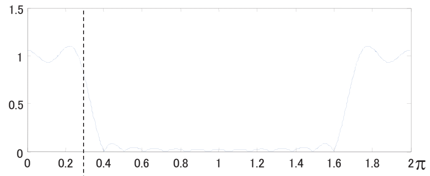
- n を 有限の値（ $-M \sim M$ ）で打ち切る
  （タップ数　$N = 2M + 1$ ：奇数の場合）
- $h(n) = h_A(n-M)$



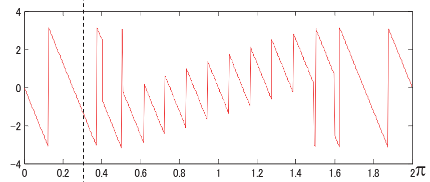
N=17

このようにして得られたシステムの周波数特性　$H(\Omega) = \sum_{n=0}^{N} h(n)\, e^{-j\Omega n}$

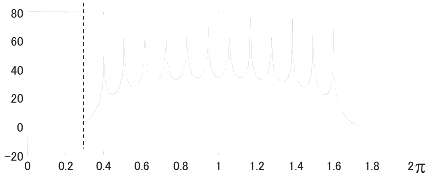
振幅特性



位相特性

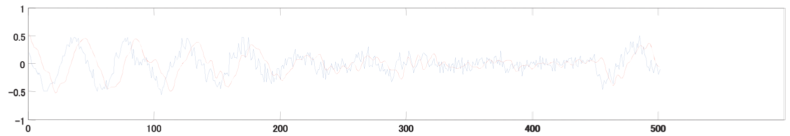


減衰特性 (dB)
$-20 \log_{10} |H(\Omega)|$

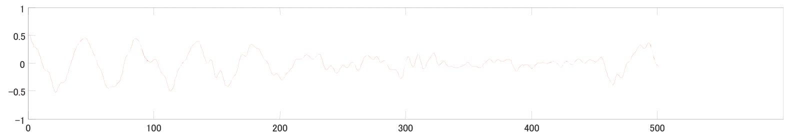


適用例

原信号

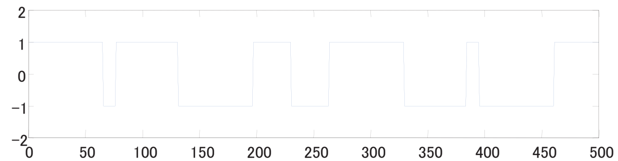


フィルター適用後の信号

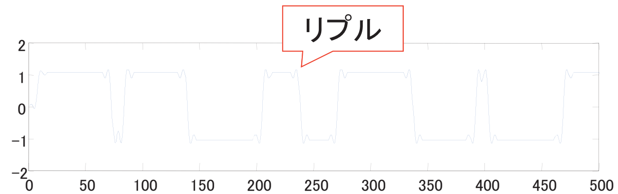


適用例（２）

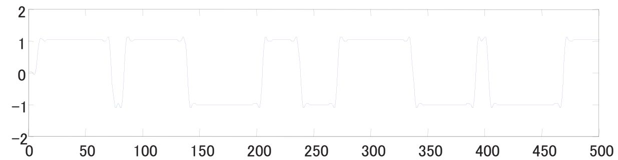
原信号



フィルタ適用後
の信号

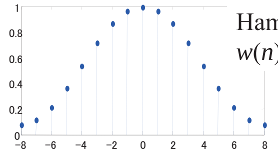


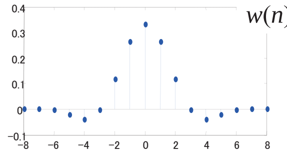
Hamming窓を
用いたフィルタ
適用後の信号



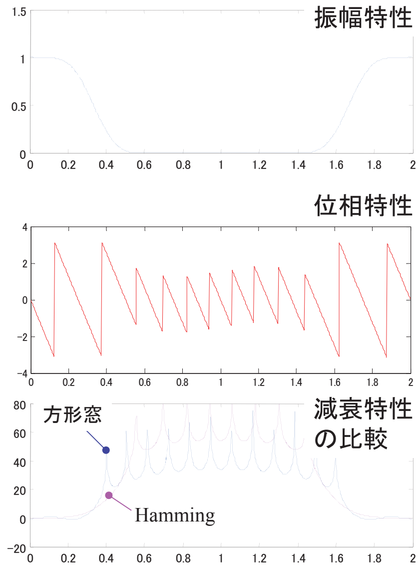
窓関数の適用

リプルを生じる原因は、インパルス応答を打ち切ったこと。
→ 打ち切りの境界を滑らかにする
→ 窓関数
例: Hanning, Hamming, Kaiser, etc.





$$w(n)=\begin{cases}0.54+0.46\cos\dfrac{2\pi n}{N-1} & for\ |n|\le (N-1)/2\\ 0 & for\ |n|>(N-1)/2\end{cases}$$



IIR(巡回形，再帰形)ディジタルフィルタ

- フィードバックループを有する
- 差分方程式 $y(k)=\sum_{m=0}^{M} a_m x(k-m)-\sum_{n=1}^{N} b_n y(k-n)$
- 伝達関数 $H(z)=\dfrac{\sum_{m=0}^{M} a_m z^{-m}}{1+\sum_{n=1}^{N} b_n z^{-n}}$
- IIRフィルタの特徴
  - FIRより少ない次数で急峻なフィルタ特性が得られる
  - 安定性に注意する必要がある
  - 完全な直線位相特性は実現できない
  - 設計は比較的複雑
- 練習問題
  - 差分方程式から上の伝達関数が得られることを示せ。

IIRシステムのインパルス応答

- 例 $y(n)=ax(n)-b\,y(n-1)$
  - 初期値 $y(-1)=0$ とする

$$h(0)=a\delta(0)-b\,y(-1)=a$$
$$h(1)=-b\,y(0)=-ab$$
$$h(2)=-b\,y(1)=ab^2$$
$$\vdots$$
$$h(n)=-b\,y(n-1)=a(-b)^n \longrightarrow \text{べき信号}$$

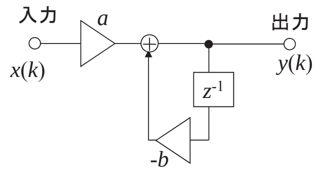
$|b|<1$ なら収束 → 安定
そうでない場合発散 → 不安定

$H(z)$ の極が全て z 平面内の単位円内に存在すること

単位インパルス関数を用いて表すと

$$h(n)=\sum_{k=0}^{\infty} b^k \delta(n-k)$$

直接形構成(最も簡単な場合)

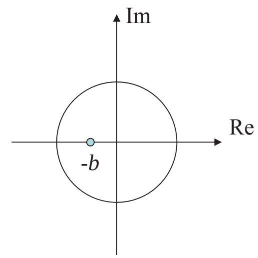


$$y(n)=ax(n)-by(n-1)$$
$$Y(z)=aX(z)-bY(z)z^{-1}$$
$$Y(z)=H(z)X(z)$$
$$H(z)=\frac{a}{1+bz^{-1}}$$

- 極は $z=-b$

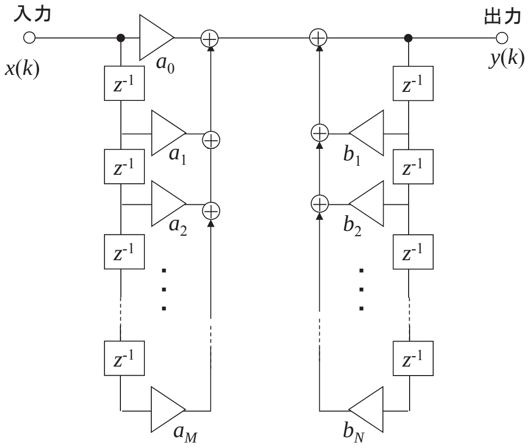
→ 安定なシステムとするには、$|b|<1$ が条件

- $b<0$ のとき(正帰還) LPF
- $b>0$ のとき(負帰還) HPF



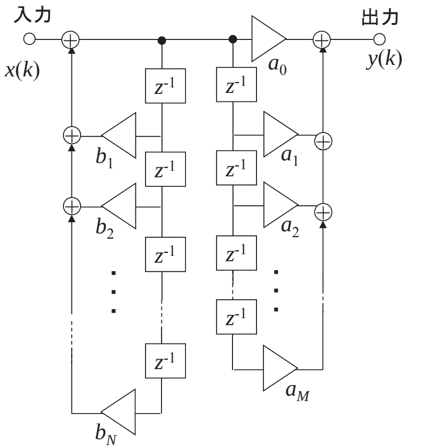
直接形構成

$$H(z)=\frac{\sum_{m=0}^{M}a_m z^{-m}}{1+\sum_{n=1}^{N}b_n z^{-n}}=\sum_{m=0}^{M}a_m z^{-m}\cdot\frac{1}{1+\sum_{n=1}^{N}b_n z^{-n}}=H_2(z)H_1(z)$$

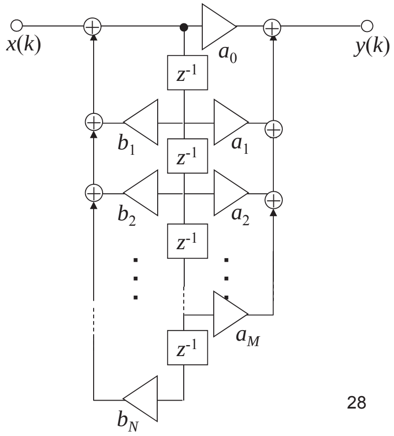


直接形構成の変形

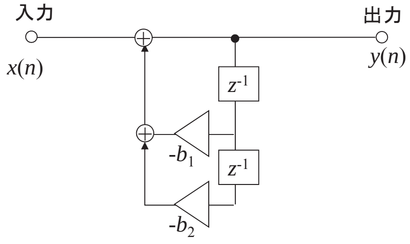
$$H(z)=\frac{\sum_{m=0}^{M}a_m z^{-m}}{1+\sum_{n=1}^{N}b_n z^{-n}}=H_2(z)H_1(z)=H_1(z)H_2(z)$$



標準形
（遅延素子数が少ない）



2次IIRフィルタ

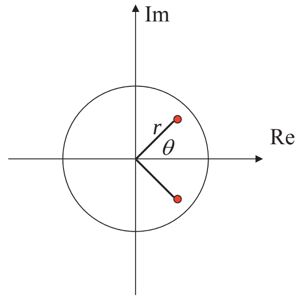


$$y(n)=x(n)-b_1y(n-1)-b_2y(n-2)$$

$$H(z)=\frac{1}{1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}$$

$$=\frac{1}{1-2r(\cos\theta)z^{-1}+r^2z^{-2}}$$

$$=\frac{1}{(rz^{-1}-e^{j\theta})(rz^{-1}-e^{-j\theta})}$$



極は分母=0の解： $z=re^{\pm j\theta}$

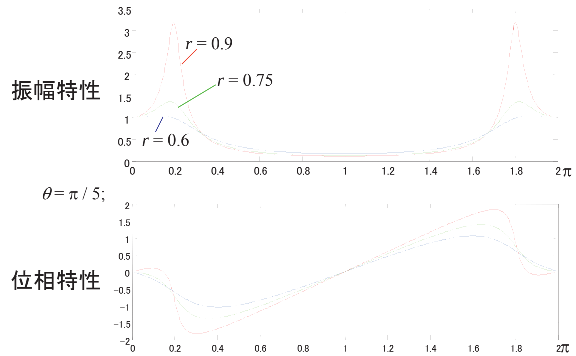
IIRディジタルフィルタの周波数応答の例

- 2次IIRフィルタの伝達関数

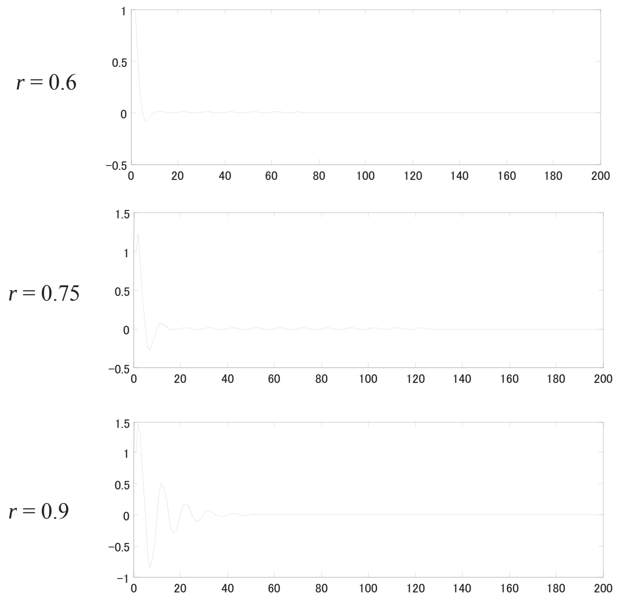
$$H(z)=\frac{1}{1-2r(\cos\theta)z^{-1}+r^2z^{-2}}$$

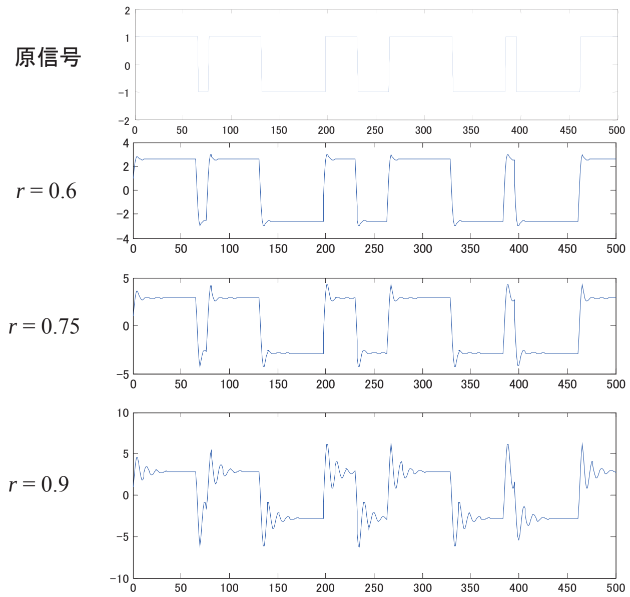
- 周波数応答

$$H(\Omega)=\frac{1}{1-2r(\cos\theta)e^{-j\Omega}+r^2e^{-j2\Omega}}$$



インパルス応答



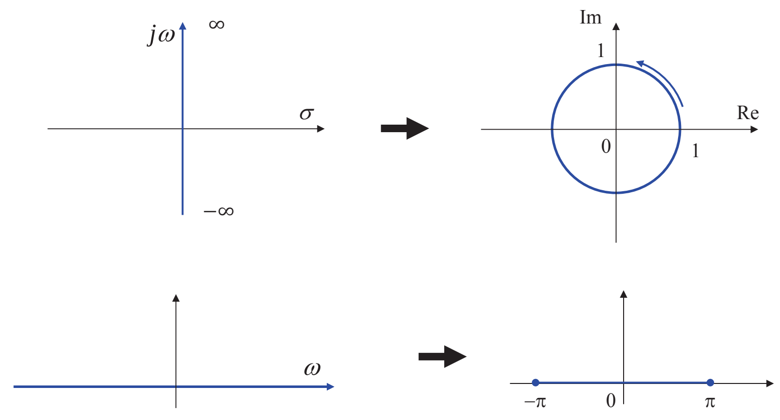


IIRデジタルフィルタの設計方法

- アナログフィルタの伝達関数を近似する方法
  s平面 → z平面
  - インパルス不変法
  - 双一次変換法

  アナログフィルタ：「プロトタイプ」
- 所望のフィルタ特性を直接近似する方法
  - バタワースフィルタ、チェビシェフフィルタなど
- 周波数変換
- オールパス変換
  - 全ての周波数に対して振幅特性が一定

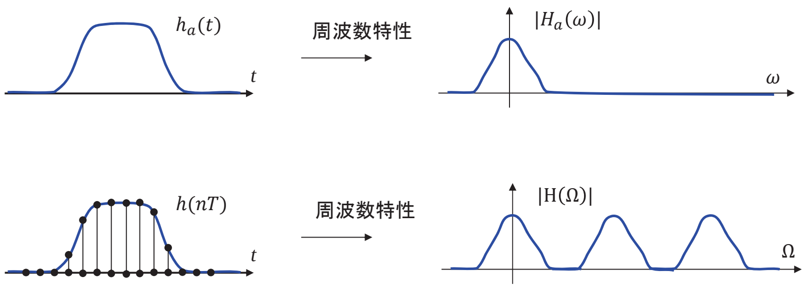
		アナログフィルタ		デジタルフィルタ
伝達関数	＝	s平面	➡	z平面
周波数特性	＝	虚数軸	➡	単位円



インパルス不変法

- アナログフィルタのインパルス応答を標本化してデジタルフィルタのインパルス応答を得る。

$$h(nT) = Th_a(nT)$$



インパルス不変法

アナログフィルタの伝達関数

$$h_a(t) = \sum_{i=1}^{m} h_i e^{-a_i t} \quad \xleftrightarrow{L} \quad H_a(s) = \sum_{i=1}^{m} \frac{h_i}{s + a_i}$$

↓ インパルス不変変換

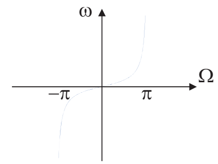
デジタルフィルタの伝達関数

$$h(nT) = T\sum_{i=1}^{m} h_i e^{-a_i nT} \quad \xleftrightarrow{Z} \quad H(z) = \sum_{i=1}^{m} \frac{Th_i}{1 - e^{-a_i T} z^{-1}}$$

※ インパルス応答が帯域制限されていない場合エイリアジングを生じる。

双一次変換

- アナログフィルタの周波数特性 ω = −∞ ~ +∞ を デジタルフィルタの周波数特性 Ω = −π ~ π に写像する



$$\omega = \tan\frac{\Omega}{2}$$

$$= \frac{\sin\frac{\Omega}{2}}{\cos\frac{\Omega}{2}} = \frac{(e^{\frac{j\Omega}{2}} - e^{-\frac{j\Omega}{2}})/2j}{(e^{\frac{j\Omega}{2}} + e^{-\frac{j\Omega}{2}})/2} = \frac{1}{j}\frac{1 - e^{-j\Omega}}{1 + e^{-j\Omega}}$$

→ アナログフィルタとデジタルフィルタの周波数の関係 ➡ $j\omega = \dfrac{1 - e^{-j\Omega}}{1 + e^{-j\Omega}}$

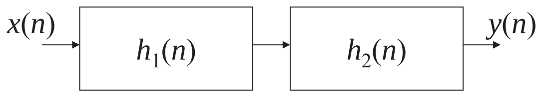
s から z への変換　$s = \dfrac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$

※特に高周波で周波数の対応関係の歪が大きい

縦続形構成

- 伝達関数 $H_1(z)$, $H_2(z)$
- インパルス応答　$h_1(n)$, $h_2(n)$

の2つのシステムが縦続に接続されている場合

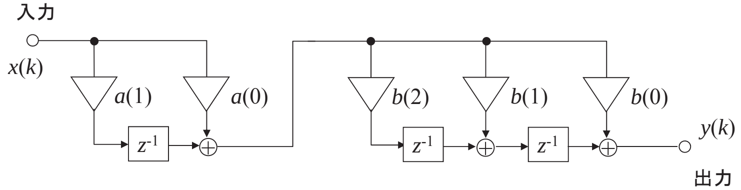


$$y(n) = h_2(n) * h_1(n) * x(n)$$

- z 変換すると
  $Y(z) = H_2(z)\, H_1(z)\, X(z)$

→ $H(z)$ が与えられたとき、$H(z) = H_2(z)\, H_1(z)$ のように因数分解できれば、縦続形構成を求めることができる

非巡回形フィルタの縦続形構成の例



- 練習問題
  - 上図の構成のディジタルフィルタについて、
    伝達関数 $H(z)$
    インパルス応答 $h(n)$
    を求めよ。

解 $H(z) = \{a(0) + a(1)z^{-1}\}\{b(0) + b(1)z^{-1} + b(2)z^{-2}\}$

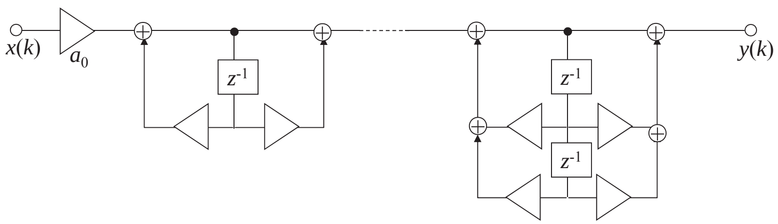
$= a(0)b(0) + \{a(1)b(0) + a(0)b(1)\}z^{-1} + \{a(0)b(2) + a(1)b(1)\}z^{-2} + a(1)b(2)z^{-3}$

これより

$h(0) = a(0)b(0),\ h(1) = a(1)b(0) + a(0)b(1),\ h(2) = a(0)b(2) + a(1)b(1),\ h(3) = a(1)b(2)$

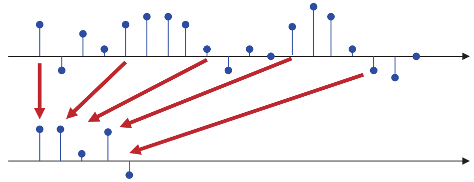
IIRフィルタの縦続型構成

$$H(z) = \frac{\sum_{m=0}^{M} a_m z^{-m}}{1 + \sum_{n=1}^{N} b_n z^{-n}} = a_0\left\{\frac{1 + a_{11}z^{-1}}{1 + b_{11}z^{-1}} \cdot \frac{1 + a_{21}z^{-1} + + a_{22}z^{-2}}{1 + b_{21}z^{-1} + b_{22}z^{-2}} \cdots\right\}$$



ダウンサンプリング／アップサンプリング

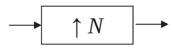
- ダウンサンプリング

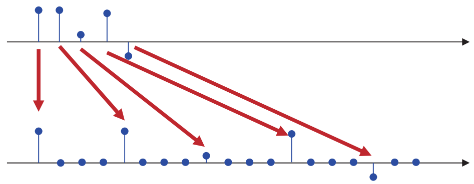


$v(n) = x(Nn)$

$(N = 4)$

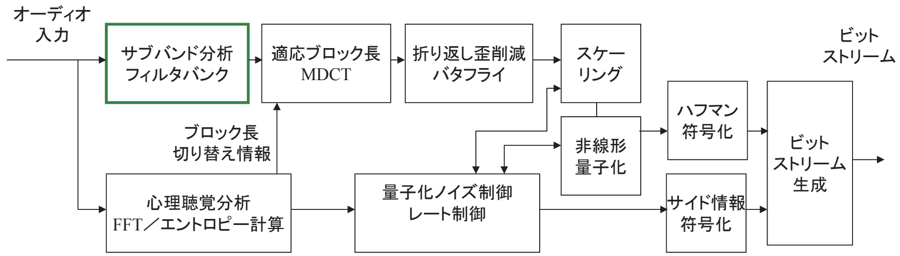
- アップサンプリング



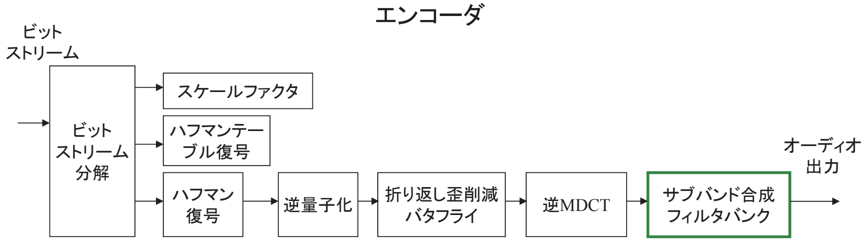


$$y(m) = \begin{cases} v\left(\frac{n}{N}\right) & n = 0, \pm N, \pm 2N\ \ldots \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

MP3 (MPEG 1 Audio Layer 3)

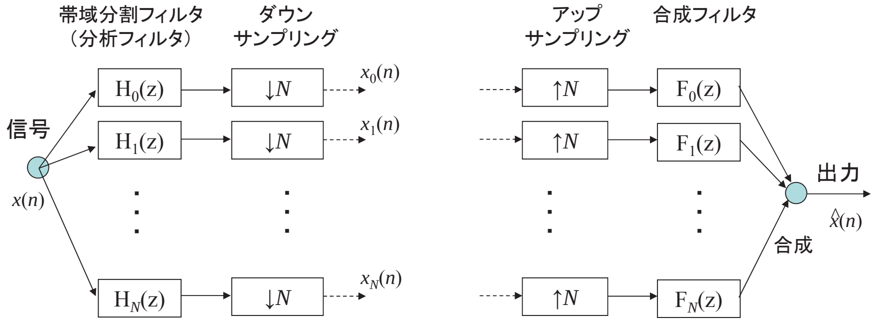


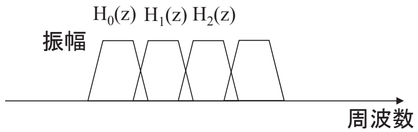
エンコーダ



デコーダ

フィルタ・バンク





合成フィルタ

$H_0(z)\,F_0(z) + H_1(z)\,F_1(z) + \cdots = z^{-b}$

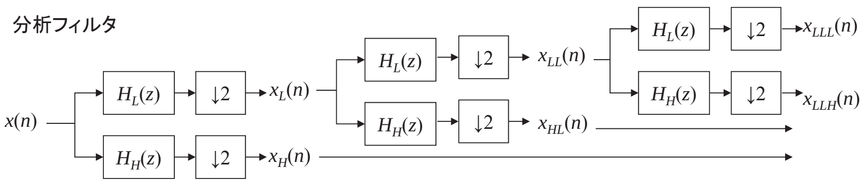
となるように決める

ウェーブレット変換

$$H_L(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + z^{-1})$$

$$H_H(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - z^{-1})$$

分析フィルタ



オクターブ分割
ウエーブレット変換　・・・　JPEG2000／MPEG4等