

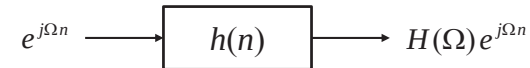
デジタル信号処理 (VII)

学術国際情報センター
山口雅浩

E-mail: yamaguchi.m.aa@m.titech.ac.jp

Web: <http://guchi.gsic.titech.ac.jp>

6.5 離散時間システムの周波数特性



- インパルス応答が $h(n)$ で与えられるシステムに、角周波数 Ω ($\Omega = \omega T$) の複素指数関数信号

$$x(n) = e^{j\Omega n} = \cos \Omega n + j \sin \Omega n$$

を入力した場合、その出力は

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(k-n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{j\Omega(k-n)} = e^{j\Omega n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\Omega k}$$

$$\rightarrow y(n) = H(\Omega) e^{j\Omega n}$$

となる。

ただし $H(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\Omega k}$ は $h(n)$ の離散時間フーリエ変換

$$y(n) = H(\Omega) e^{j\Omega n}$$

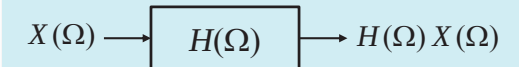
$H(\Omega)$ は角周波数 Ω の入力に対する係数 (ゲイン)

= (線形シフト不変) 離散時間システムの周波数特性
(周波数伝達関数)

$$H(\Omega) = A(\Omega) e^{-j\theta(\Omega)}$$

$A(\Omega)$ 振幅特性

$\theta(\Omega)$ 位相特性



$$y(n) = A(\Omega) e^{j\{\Omega n + \theta(\Omega)\}}$$

振幅が $A(\Omega)$ 倍となり、位相が $\theta(\Omega)$ だけずれる

6. 離散時間信号とシステム

6.1 離散時間信号

6.2 離散たたみ込み演算

6.3 離散時間システム

6.4 離散時間信号のフーリエ変換

– 離散時間フーリエ変換

– 離散時間フーリエ変換の性質

6.5 離散時間システムの周波数特性

例題1

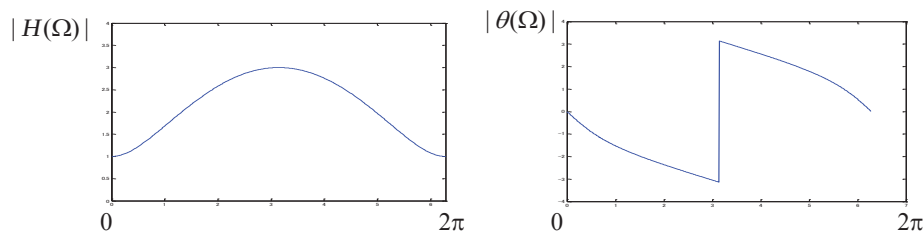
インパルス応答が $h(n) = \{-1, 2\}$ で与えられる線形時不変離散時間システムの周波数伝達特性、振幅特性、位相特性を求めよ

$$H(\Omega) = \text{DTFT}\{h(n)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \cdot e^{-j\Omega k} = h(0) + h(1)e^{-j\Omega} = -1 + 2e^{-j\Omega}$$

$$|H(\Omega)|^2 = 1 + 4 - 2(e^{-j\Omega} + e^{j\Omega}) = 5 - 4\cos\Omega$$

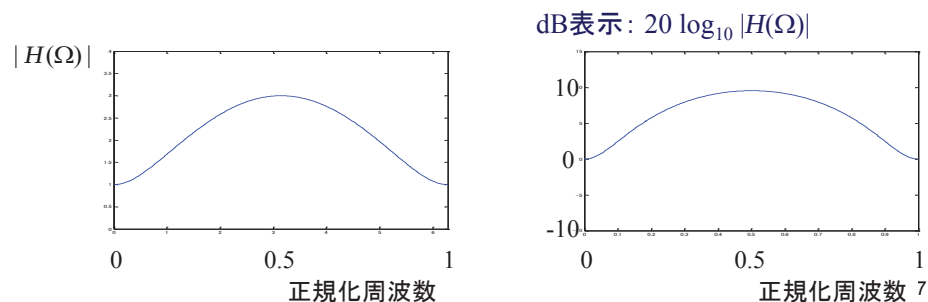
$$\text{振幅特性} \quad |H(\Omega)| = \sqrt{5 - 4\cos\Omega}$$

$$\text{位相特性} \quad \theta(\Omega) = \tan^{-1} \frac{\text{Im}\{H(\Omega)\}}{\text{Re}\{H(\Omega)\}} = -\tan^{-1} \frac{2\sin\Omega}{-1 + 2\cos\Omega}$$



正規化周波数特性の表示

- T_s : 標本化間隔(周期)
- $f_s = 1 / T_s$: 標本化周波数
- $\Omega = \omega T_s$: 正規化角周波数
- $f_N = \Omega / 2\pi = f / f_s$: 正規化周波数
→ 標本化間隔を気にする必要が無い。
(標本化間隔で割れば実際の周波数)



例題2

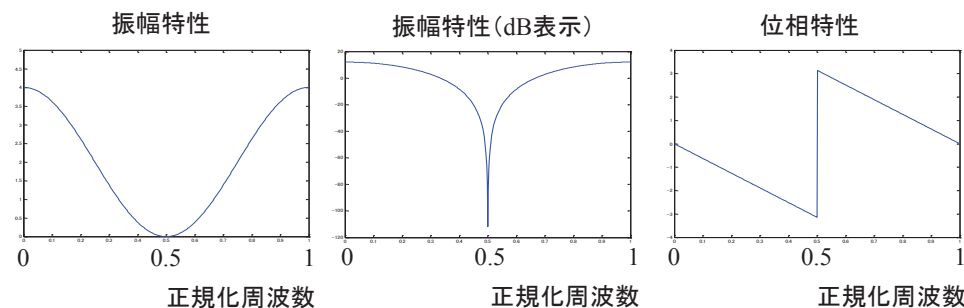
インパルス応答が $h(n) = \{1, 2, 1\}$ で与えられる線形時不変離散時間システムの周波数伝達特性、振幅特性、位相特性を求めよ

$$H(\Omega) = 1 + 2e^{-j\Omega} + e^{-2j\Omega} = (e^{j\Omega} + 2 + e^{-j\Omega})e^{-j\Omega} = 2(1 + \cos\Omega)e^{-j\Omega}$$

$$\text{振幅特性} \quad |H(\Omega)| = 2(1 + \cos\Omega)$$

$$\text{位相特性} \quad \theta(\Omega) = \arg\{2(1 + \cos\Omega)e^{-j\Omega}\} = \arg\{e^{-j\Omega}\} = -\Omega$$

直線位相特性



例題2.7 (p.23)

差分方程式 $y(n] = x(n) + b y(n-1]$ で表されるシステムの周波数伝達特性、振幅特性、位相特性を求めよ。ただし $|b| < 1$ とする。

両辺を離散時間フーリエ変換してみる

$$Y(\Omega) = X(\Omega) + bY(\Omega) \cdot e^{-j\Omega}$$

変形すると

$$(1 - be^{-j\Omega})Y(\Omega) = X(\Omega) \longrightarrow Y(\Omega) = \frac{X(\Omega)}{1 - be^{-j\Omega}} = H(\Omega)X(\Omega)$$

より、

$$H(\Omega) = \frac{1}{1 - be^{-j\Omega}}$$

$$\text{振幅特性} \quad |H(\Omega)| = \sqrt{\frac{1}{(1 - be^{-j\Omega})(1 - be^{j\Omega})}} = \frac{1}{\sqrt{1 + b^2 - 2b\cos\Omega}}$$

$$\text{位相特性} \quad \theta(\Omega) = -\tan^{-1} \frac{b\sin\Omega}{1 - b\cos\Omega}$$