ディジタル電子回路

第5回

論理関数の簡単化

真理値表から加法標準形、または乗法標準形で論理関数を導出して実現すると、冗長で必要となる論理ゲートも多くなる。

→ 論理関数の簡単化が必要

カルノー図、クワイン・マクラスキー法

＜簡単な例＞

AND

A	B	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

f = A+B と簡単な論理式で表現できる（論理ゲートも1つでよい）が、真理値表から加法標準形を求めると・・・

$f = \bar{A}\cdot B + A\cdot\bar{B} + A\cdot B$

と3項の和からなる。

これをそのまま実現すると、2入力ANDゲート3個、3入力ORゲート1個、NOTゲート2個必要。

論理式の変形で簡略化すると見通しの悪いことが多い。

$f = \bar{A}\cdot B + A\cdot\bar{B} + A\cdot B = \bar{A}\cdot B + A\cdot(\bar{B} + B) = \bar{A}\cdot B + A$

分配則を使えば・・・ $= (A+\bar{A})\cdot(A+B) = A+B$

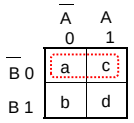
変数が多くなるとたいへん。 → 図式解法

カルノー図

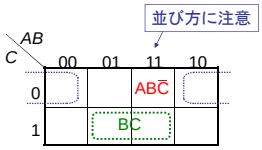
カルノー図 （Karnaugh Map）

論理変数のANDの組み合わせを平面に表す。

隣り合うマス目では変数の状態はただ1箇所だけ異なるように配置。



2変数のカルノー図



(a) 3変数

aは$\bar{A}\cdot\bar{B}$、 cはA・$\bar{B}$を表す。

で囲んだところは、$\bar{B}$ となる。

$\bar{A}\cdot\bar{B}+A\cdot\bar{B} = \bar{B}$

＜問題＞

1. A・B・$\bar{C}$はどこになるか？
2. BCはどこになるか？
3. で示した場所はどう表されるか

$\bar{B}\cdot\bar{C}$

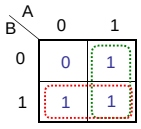
カルノー図による簡単化

＜簡単な例＞

AND

A	B	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$f = \bar{A}\cdot B + A\cdot\bar{B} + A\cdot B$



カルノー図

1.カルノー図を書き、論理関数の出力を記入する。

2.積項に対応する長方形で、1となるものを大きいものから順次探す。

はB、 はAを示す。

3.求めた長方形のなるべく少ない組み合わせですべて1を満たすものを探す。

4.積和形で表す。

$f = A + B$

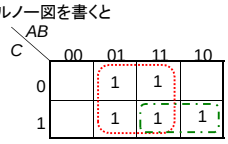
カルノー図による簡単化の例

2週目にやった例題 ： 真理値表から論理関数を加法標準形で表すと、

A	B	C	f(A,B,C)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$f(A,B,C) = \bar{A}\cdot B\cdot\bar{C} + \bar{A}\cdot B\cdot C + A\cdot\bar{B}\cdot C + A\cdot B\cdot\bar{C} + A\cdot B\cdot C$

カルノー図を書くと



で示されるところは：B

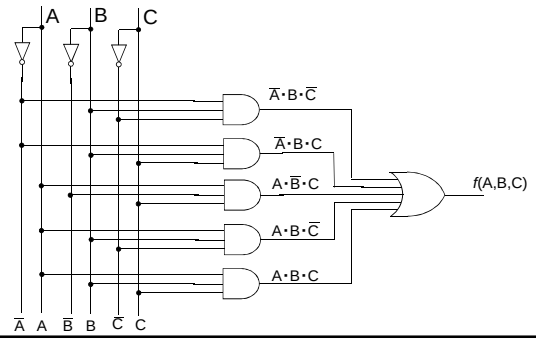
で示されるところは：AC

よって $f = B + A\cdot C$

加法標準形での実現

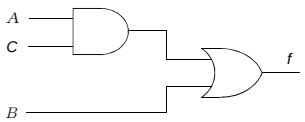
求めた論理関数を直接AND、OR、NOTで実現してみると・・・・

加法標準形 $f(A,B,C) = \bar{A}\cdot B\cdot\bar{C} + \bar{A}\cdot B\cdot C + A\cdot\bar{B}\cdot C + A\cdot B\cdot\bar{C} + A\cdot B\cdot C$



簡単化した論理関数の実現

$f = B + A \cdot C$



例題

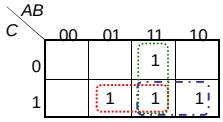
多数決回路 （A,B,Cのうち2つ以上が1であると1を出力）

A	B	C	f(A,B,C)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

（1）加法標準形で論理式を求めよ。
（2）カルノー図を書いて簡単化し、論理式を求めよ。
（3）（1）と（2）で求めた論理式が等しいことを示せ。

（1）$f(A,B,C) = \overline{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot B \cdot C$

（2）



:B・C
:A・C
:A・B

よって、$f = A \cdot B + B \cdot C + A \cdot C$

例題解答のつづき

（3）（1）と（2）で求めた論理式が等しいことを示せ。

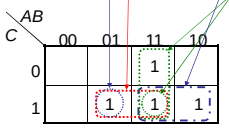
$f(A,B,C) = \overline{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot B \cdot C$

$= \overline{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot B \cdot C + A \cdot B \cdot C + A \cdot B \cdot C$

$= (\overline{A} + A) \cdot B \cdot C + A \cdot C \cdot (\overline{B} + B) + A \cdot B \cdot (\overline{C} + C)$

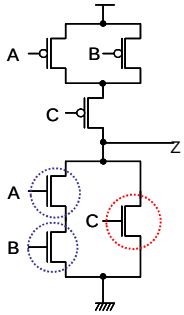
$= A \cdot B + B \cdot C + A \cdot C$

$f = A \cdot B + B \cdot C + A \cdot C$



例題をもう一つ

以下のCMOS論理関数の論理式を求めよ。



（1）CMOS論理回路から直接求めると

$Z = \overline{A \cdot B + C}$

（2）真理値表から求めると

$Z = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$

（3）カルノー図を書いて求めると・・・

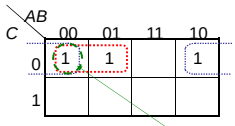
A	B	C	Z
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

例題をもう一つ （つづき）

（1）CMOS論理回路から直接求めると $Z = \overline{A \cdot B + C}$

（2）真理値表から求めると $Z = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$

（3）カルノー図を書いて求めると・・・



:$\overline{A} \cdot \overline{C}$　:$\overline{B} \cdot \overline{C}$　よってZ = $\overline{A} \cdot \overline{C} + \overline{B} \cdot \overline{C}$

$Z = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$

$= (\overline{B} + B) \cdot \overline{A} \cdot \overline{C} + (A + \overline{A}) \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$

$= \overline{A} \cdot \overline{C} + \overline{B} \cdot \overline{C}$

$= (\overline{A} + \overline{B}) \cdot \overline{C} = (\overline{A \cdot B}) \cdot \overline{C}$

$= \overline{A \cdot B + C}$

カルノー図 （2～4変数）

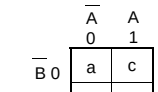
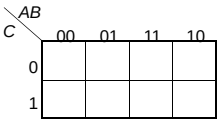
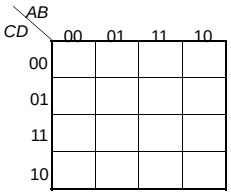


図4.15　2変数のカルノー図

隣り合うマス目間では、1個の変数の状態だけ異なる。（左端と右端、上端と下端も隣合わせ）



(a) 3変数

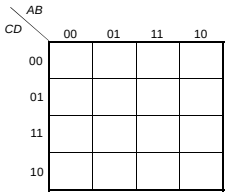


(b) 4変数

図4.16 3,4変数のカルノー図

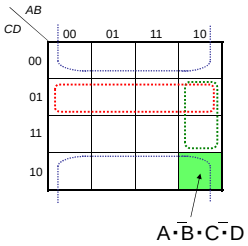
カルノー図 （4変数）

問題 （1） $A \cdot \overline{B} \cdot C \cdot \overline{D}$、
（2） $A \cdot \overline{B} \cdot D$、
（3） $\overline{C} \cdot D$、
（4） $\overline{D}$ はどこになるか？



カルノー図 （4変数）

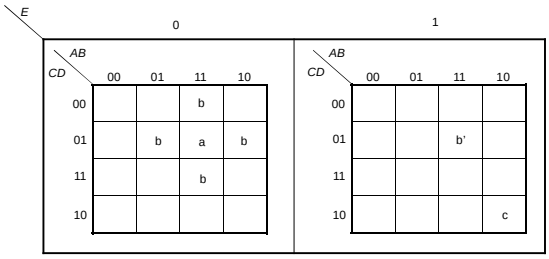
問題 （1） $A \cdot \overline{B} \cdot C \cdot \overline{D}$、
（2） $A \cdot \overline{B} \cdot D$、
（3） $\overline{C} \cdot D$、
（4） $\overline{D}$ はどこになるか？



（1） 図中緑のマス （面積1：最小）
（2） 面積2
（3） 面積4
（4） 面積8
最上段と最下段も隣同士

カルノー図の1マスは**最小項**を表す。

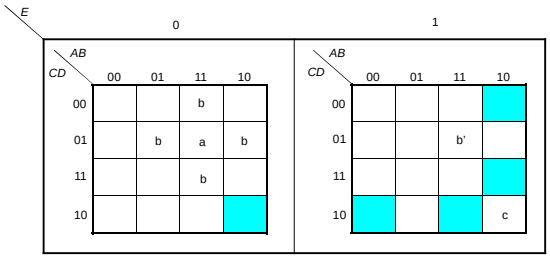
カルノー図（5変数）



5変数の時はちょっと複雑。特に隣り合うマス目の見立てが難しくなる。
a と隣合うマスはbだけでなく、b'も含まれる。
a : $A \cdot B \cdot \overline{C} \cdot D \cdot \overline{E}$ b': $A \cdot B \cdot \overline{C} \cdot D \cdot E$

＜問題＞ c と隣り合うマス目はどこか？

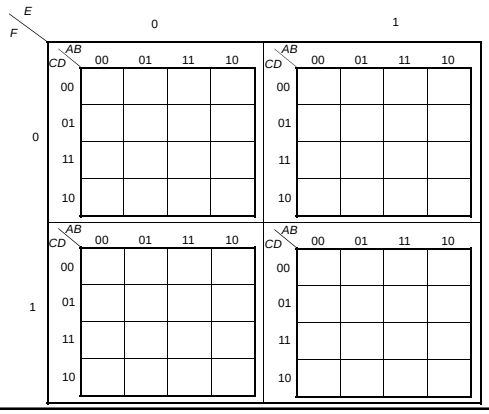
カルノー図（5変数）



5変数の時はちょっと複雑。特に隣り合うマス目の見立てが難しくなる。
a と隣合うマスはbだけでなく、b'も含まれる。
a : $A \cdot B \cdot \overline{C} \cdot D \cdot \overline{E}$ b': $A \cdot B \cdot \overline{C} \cdot D \cdot E$

＜問題＞ c と隣り合うマス目はどこか？

カルノー図（6変数）（正直、4変数まで・・・・）



隣接するマス目の性質

すでにやっていますが、もう一度まとめると・・・

隣接するマス目のORをとると、変数を少なくできる。

＜例：a の場合＞
$\overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} \cdot D$
$= \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} \cdot (\overline{D}+D)$
$= \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C}$
（つまりDは0でも1でもいい）

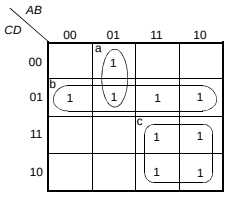


図4.19 隣接するます目

＜問題＞
図中の b、c の領域はどのような論理式で表されるか？

b: $\overline{C} \cdot D$

c: $A \cdot C$

カルノー図による論理関数の簡単化（教科書バージョン）

教科書は小さいものからリストアップしている・・・

【ステップ1】 カルノー図中で他の1と隣接しない孤立した1をループ ▭ で囲む。

【ステップ2】 隣接する2個の1の組で2^n個（n≥2）の隣接する1の組に含まれてしまわない1をループで囲む。（図中のbに相当、dは含まれない。）

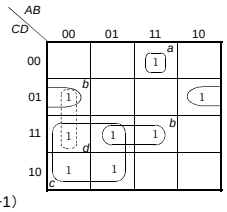
【ステップ3】 隣接する4個の1の組で2^n個（n≥3）の隣接する1の組に含まれてしまわない1をループで囲む。

【ステップ4】 隣接する 2^i（i ≥3）個の1の組で2^n個（n≥i+1）の隣接する1の組に含まれてしまわない1を順次ループで囲む。

【ステップ5】 すべての1がいずれかのループで囲まれるまで続ける。

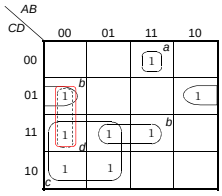
【ステップ6】 ループで囲まれたそれぞれの最小項についてORをとり、非共通の変数を消去してそのループが表す積項（主項）を作り、すべてのループについてORで結ぶ。（ただし、ループd のようにいずれの1も他の組に属する項は不要）

（例）cの項 $\bar{A}\cdot\bar{B}\cdot C\cdot D+\bar{A}\cdot\bar{B}\cdot C\cdot\bar{D}+\bar{A}\cdot B\cdot C\cdot D+\bar{A}\cdot B\cdot C\cdot\bar{D}=\bar{A}\cdot C$



カルノー図による論理関数の簡単化

1. カルノー図中に真理値表、または加法標準形から1を記入する。
2. 図中で隣接した1を探し、ループで囲む。（ループの面積は2のべき乗の大きさ。）
3. ループの大きさはなるべく大きく。（積項の変数を少なく）、数はなるべく少なく。（OR演算を少なく）
4. 積和形で論理関数を表す。



dの組 ▭ は他のループ中に含まれているので、論理関数の項として含めなくて良い。

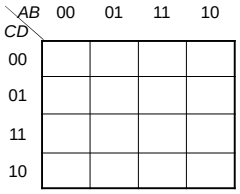
これ以上大きくできないループで表される積項を「主項」という。

$f = A\cdot B\cdot\bar{C}\cdot\bar{D} + \bar{A}\cdot\bar{B}\cdot\bar{C}\cdot D + A\cdot\bar{B}\cdot\bar{C}\cdot D + \bar{A}\cdot\bar{B}\cdot C\cdot D$
$+\bar{A}\cdot B\cdot C\cdot D+A\cdot B\cdot C\cdot D+\bar{A}\cdot\bar{B}\cdot C\cdot\bar{D}+\bar{A}\cdot B\cdot C\cdot\bar{D}$

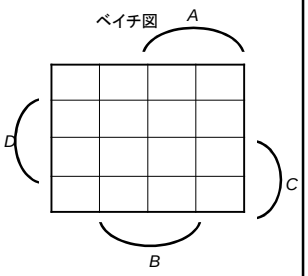
$f = \bar{A}\cdot C + \bar{B}\cdot\bar{C}\cdot D + B\cdot C\cdot D + A\cdot B\cdot\bar{C}\cdot\bar{D}$

カルノー(Karnaugh)図とベイチ(Veitch)図

カルノー図



ベイチ図



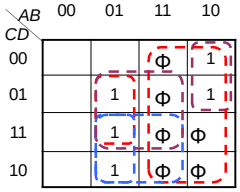
実は、カルノー図よりベイチ図が古い。1952対1953年
でもカルノー図の方が名前として一般的！

禁止項を利用した簡単化

論理変数のすべての値に対して、論理関数の値が定まっていない、またその組み合わせが起こらない場合。

禁止項、ドント・ケア

要は論理変数のこれらの組に対する論理関数の値は0でも1でも良い。
たとえば入力が0-9までとして、5以上の場合に動く回路を考えよう。0101以上で1001までがtrue



$$f = \bar{A}BD + \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C}$$

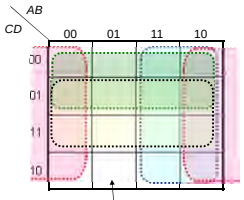
ドントケアを考えよう

$$f = A + BC + BD$$

カルノー図と最小項、最大項

カルノー図の1マスは**最小項**を表す。

加法標準形で表現 ⟷ カルノー図に1を記入。



ここだけ除外した15マス分

最大項はどのようになるか？
例えば A+B+C+D はどこになるか？

A: 8マス分
$\bar{B}$: 8マス分
$\bar{C}$: 8マス分
D: 8マス分

これは $A+\bar{B}+\bar{C}+D=\overline{\bar{A}\cdot B\cdot C\cdot\bar{D}}$ からも明らか。

最大項からの簡単化

1の数によっては、最大項からの簡単化（和積形）の方が簡単？
考え方はいままでと全く一緒（真理値表で0を拾ったようにする）

まず最大項で取り除かれるマスに1を記入。否定に相当 $\overline{f(x_1,x_2,\ldots+,\bullet)}$

↓

カルノーマップで簡単化する

↓

積和形で簡単化する

↓

全ての補元をとる （ここで双対関数になる） $\overline{f(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots+,\bullet)}$

↓

和と積を入れ替える $\overline{f(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots\bullet,+)}$

↓

最終の答えはドモルガンの定理を使う $f(x_1,x_2,\ldots+,\bullet)$

5-9が入力された時に動く回路

0101から1001までがtrue
0000から0100と
1010から1111までがfalse

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1	1	
01	1		1	
11	1		1	1
10	1		1	1

$$f = \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}\,\overline{C}\,\overline{D} + AB + AC$$

和と積を入れ替え、かつ全ての否定を取る

$$f = (A+B)(A+C+D)(\overline{A}+\overline{B})(\overline{A}+\overline{C})$$

NOT 3つ、OR 4つ、AND 1つ合わせて8つのゲート

最小項からのカルノーマップでの答え

$$f = \overline{A}BD + \overline{A}BC + A\overline{B}\,\overline{C}$$

NOT 3つ、AND 3つ、OR 1つ合わせて7つのゲート

5-9が入力された時に動く回路(10以降はドントケア)

0101から1001までがtrue
0000から0100までがfalse
1010から1111までがdon't care

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1	Φ	
01	1		Φ	
11	1		Φ	Φ
10	1		Φ	Φ

$$f = \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}\,\overline{C}\,\overline{D}$$

和と積を入れ替え、かつ全ての否定を取る

$$f = (A+B)(A+C+D)$$

OR 2つ、AND 1つ合わせて3つのゲート

最小項からのカルノーマップでの答え

$$f = A + BC + BD$$

AND 3つ、OR 1つ合わせて4つのゲート

最大項からの簡単化

0に注目して、そこを1に置き換える
積和形の簡単化を行う。

$$\overline{f(x_1, x_2, \ldots +, \bullet)}$$

それから、全て補元を取る。

$$\overline{f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots +, \bullet)}$$

+を・に、・を＋に置き換える。

$$\overline{f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots \bullet, +)}$$

最終の答えはドモルガンの定理を使うと

$$f(x_1, x_2, \ldots +, \bullet)$$

に戻る。一色らの参考書では $\overline{f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots +, \bullet)}$ の段階
(双対関数と呼ぶ)のレベルで簡単化するが、これだと
真理値表を作り直すのが面倒なので、補元を取る前の出力
反転側で簡単化した。本来は真理値表を作り直すべき