ディジタル電子回路

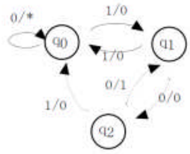
第14回

出力や次の遷移先が未定義だと？（両立性）

出力状態が未定義でも、その出力を
みないということは出来る。
（例えば入力列の長さが決まっていて、
入力中の出力は見ない）

出力が未定義でも良い。

Q \ x	δ 0	δ 1	ω 0	ω 1
q0	q0	q1	*	0
q1	q2	q0	0	0
q2	q1	q0	1	0



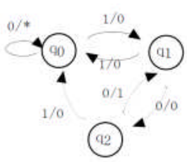
0か1か出力が確定していないのは？
q_0へ0が入ったとき。

1を確実に出力するのは
q_2へ0が入った時

それ以外は0を出力する。

でも、出力状態で仕分ける<u>等価性</u>では、
この状態を合わせることは出来ない。

出力や次の遷移先が未定義だと？（両立性）



Q \ x	δ 0	δ 1	ω 0	ω 1
q0	q0	q1	*	0
q1	q2	q0	0	0
q2	q1	q0	1	0

0か1か出力が確定していないのは？
q_0へ0が入ったとき。

1を確実に出力するのは
q_2へ0が入った時

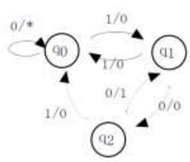
それ以外は0を出力する。

入力と出力だけ見て、
初期状態を見分けようとすると

0を入力して1が出たらq_2かq_0にいる。
0を入力して0が出たらq_0かq_1にいる。
1を入力したらどの状態でも0が出る

どの状態にいるか見分けられない

出力や次の遷移先が未定義だと？（両立性）

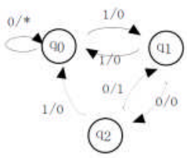


Q \ x	δ 0	δ 1	ω 0	ω 1
q0	q0	q1	*	0
q1	q2	q0	0	0
q2	q1	q0	1	0

入力と出力だけ見て、 初期状態を見分けようとすると
q_0, q_1,q_2に011001を入力すると
q_0 は $q_0 \to q_1 \to q_0 \to q_0 \to q_0 \to q_1$ と推移して *00**0を出力
q_1 は $q_2 \to q_0 \to q_1 \to q_2 \to q_1 \to q_0$ と推移して 000010を出力
q_2 は $q_1 \to q_0 \to q_1 \to q_2 \to q_1 \to q_0$と推移して 100010を出力

q_0, q_1,q_2に011001を入力しても、
初期状態がq_1ではないこと、q_2ではないことは
0を入れた出力で見分けられるが、q_0ではないことをはまだわからない。

出力や次の遷移先が未定義だと？（両立性）

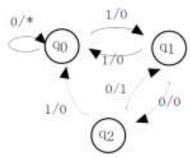


Q \ x	δ 0	δ 1	ω 0	ω 1
q0	q0	q1	*	0
q1	q2	q0	0	0
q2	q1	q0	1	0

1	2 0 1 0	
2	1 0	×
	0	1

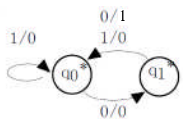
入力で初期状態が見分けられるか、確認
q_1とq_2は出力が違うので明らかに違う。
×をする。
q_0とq_1では出力では見分けられない。
入力0でq_0とq_2に、入力1でq_0とq_1に移るので、
その遷移先を書く
q_0とq_2も出力では見分けられない。
入力0でも1でもq_0とq_1に移るので、
その遷移先を書く
で、q_0とq_2、q_0とq_1の組み合わせから出力では見分けられるq_1とq_2に行くときはない。見分けられない。

出力や次の遷移先が未定義だと？（両立性）



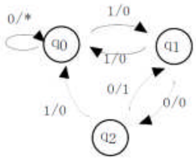
Q \ x	δ 0	δ 1	ω 0	ω 1
q0	q0	q1	*	0
q1	q2	q0	0	0
q2	q1	q0	1	0

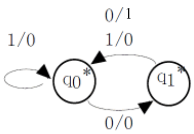
見分けられないなら、2状態にできないか？



$\{q_0, q_1\}$からq_0^*を、$\{q_0, q_2\}$からq_1^*を作ってみよう。

出力や次の遷移先が未定義だと？（両立性）





q_0と$q_0{}^*$,$q_1{}^*$に011001を入力すると
q_0 は $q_0 \rightarrow q_1 \rightarrow q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_1$ と推移して *00**0を出力
$q_0{}^*$ は $q_1{}^* \rightarrow q_0{}^* \rightarrow q_0{}^* \rightarrow q_1{}^* \rightarrow q_0{}^* \rightarrow q_0{}^*$と推移して 000010を出力
$q_1{}^*$ は $q_0{}^* \rightarrow q_0{}^* \rightarrow q_0{}^* \rightarrow q_1{}^* \rightarrow q_0{}^* \rightarrow q_0{}^*$と推移して 100010を出力

実は$q_0{}^*$はq_0とq_1と、$q_1{}^*$はq_0とq_2と、＊の部分を除けば、同じ出力をする。

このようなときに、q_0とq_1、q_0とq_2は両立性を持つと呼び、状態を減らせる。

両立性で状態遷移図を組みなおすときの手順

1.入力した時の出力から見分けられるときは状態を分けなければいけない。
見分けられるときは 非両立的であると呼ぶ。

先の例では q_1とq_2は非両立的である。

2. 非両立的でないものは、両立的なので、
そこから両立的である状態の集合をつくる。

先の例では、$\{q_{0,}\ q_1\}$も、$\{q_{0,}\ q_2\}$も両立的な集合

3. 両立的な集合を新たな状態に対応させ、状態遷移表を作り直す。

先の例では$\{q_{0,}\ q_1\}$から$q_0{}^*$を、$\{q_{0,}\ q_2\}$から$q_1{}^*$を
それぞれ新たな状態として、状態遷移図を作った。

入力系列

本来は等価性においても重要な概念
ある連なった入力（入力系列）があるときに、
状態を区別できるかどうか？

また、両立性においては、未定義の出力があるため、
印加できる入力系列という概念がでる。

すなわち、
有る状態に、ある入力系列を入力したとき、
最後の入力に対する出力が定義されている場合
(それまでの入力に対しては、状態は定義されなくてはならないが、出力は定義されなくても良い)、印加できる入力系列であるという。

非両立性を見分ける手順

1.入力した時の出力から見分けられるときは、状態同士を非両立的と呼ぶ。

じゃ、状態数増やして方法確認　次の状態遷移表で考えよう。
ここでは遷移先もドントケアにしてみた。（これは本来の設計上は稀である）
先ほど作ったのと同じ表（含意表と呼ぶ）を作る。
まず$q_{0,}$とq_1、$q_{0,}$とq_4は0を入力する出力が明らかに違うので×にする。

	遷移先		出力	
	0	1	0	1
q_0	q_5	q_4	0	1
q_1	q_4	q_5	1	1
q_2	q_1	q_4	＊	1
q_3	q_1	＊	＊	＊
q_4	q_0	q_3	1	＊
q_5	＊	q_3	＊	1

1	×				
2					
3					
4	×				
5					
	0	1	2	3	4

非両立性を見分ける手順

つぎに、q_0とq_2は、0をいれるとq_1とq_5に、1をいれるとq_4に推移するので、それをそれぞれ上段/下段に分けて入れる。
（44は見分けがつかないので、書き入れなくても良い）

	遷移先		出力	
	0	1	0	1
q_0	q_5	q_4	0	1
q_1	q_4	q_5	1	1
q_2	q_1	q_4	＊	1
q_3	q_1	＊	＊	＊
q_4	q_0	q_3	1	＊
q_5	＊	q_3	＊	1

1	×				
2	51 44				
3					
4	×				
5					
	0	1	2	3	4

非両立性を見分ける手順

つぎに、q_0とq_3は、0をいれるとq_1とq_5になる。1をいれるとq_3がドントケアに推移するので、もう見分けられなくなる。そこでq_1とq_5だけ記入する。

	遷移先		出力	
	0	1	0	1
q_0	q_5	q_4	0	1
q_1	q_4	q_5	1	1
q_2	q_1	q_4	＊	1
q_3	q_1	＊	＊	＊
q_4	q_0	q_3	1	＊
q_5	＊	q_3	＊	1

1	×				
2	51 44				
3	51				
4	×				
5					
	0	1	2	3	4

非両立性を見分ける手順

以下同様に記入していく。
q_3とq_5は、0をいれるとq_5にドントケアに推移し、
1をいれるとq_3がドントケアに推移するので全く見分けられない。
空白に残す。

	遷移先		出力	
	0	1	0	1
q_0	q_5	q_4	0	1
q_1	q_4	q_5	1	1
q_2	q_1	q_4	＊	1
q_3	q_1	＊	＊	＊
q_4	q_0	q_3	1	＊
q_5	＊	q_3	＊	1

1					
2	51 44	41 54			
3	51	41	11		
4		40 53	10 43	10	
5	43	53	43		33
	0	1	2	3	4

非両立性を見分ける手順

さて、非両立的な10,40に推移すれば、両立しないことが判る。
そこで10に注目すると、42と43が10に推移する。そこでそこも×にして、
10が終わったので、○をつける。

	遷移先		出力	
	0	1	0	1
q_0	q_5	q_4	0	1
q_1	q_4	q_5	1	1
q_2	q_1	q_4	＊	1
q_3	q_1	＊	＊	＊
q_4	q_0	q_3	1	＊
q_5	＊	q_3	＊	1

1					
2	51 44	41 54			
3	51	41	11		
4		40 53	~~10~~ ~~43~~	~~10~~	
5	43	53	43		33
	0	1	2	3	4

非両立性を見分ける手順

40に注目すると、41が40に推移する。そこでそこも×にして、
40が終わったので、○をつける。

	遷移先		出力	
	0	1	0	1
q_0	q_5	q_4	0	1
q_1	q_4	q_5	1	1
q_2	q_1	q_4	＊	1
q_3	q_1	＊	＊	＊
q_4	q_0	q_3	1	＊
q_5	＊	q_3	＊	1

1					
2	51 44	41 54			
3	51	41	11		
4		~~40~~ ~~53~~	~~10~~ ~~43~~	~~10~~	
5	43	53	43		33
	0	1	2	3	4

非両立性を見分ける手順

あらたに41,42,43が非両立的となった。
そこで41に注目すると、21と31が41に推移する。そこでそこも×にして、
41が終わったので、○をつける。

	遷移先		出力	
	0	1	0	1
q_0	q_5	q_4	0	1
q_1	q_4	q_5	1	1
q_2	q_1	q_4	＊	1
q_3	q_1	＊	＊	＊
q_4	q_0	q_3	1	＊
q_5	＊	q_3	＊	1

1					
2	51 44	~~41~~ ~~54~~			
3	51	~~41~~	11		
4		~~40~~ ~~53~~	~~10~~ ~~43~~	~~10~~	
5	43	53	43		33
	0	1	2	3	4

非両立性を見分ける手順

42への推移はない。○をつける。
43に注目すると、50と52が43に推移する。そこで×にして、43に○をつける。

	遷移先		出力	
	0	1	0	1
q_0	q_5	q_4	0	1
q_1	q_4	q_5	1	1
q_2	q_1	q_4	＊	1
q_3	q_1	＊	＊	＊
q_4	q_0	q_3	1	＊
q_5	＊	q_3	＊	1

1					
2	51 44	~~41~~ ~~54~~			
3	51	~~41~~	11		
4		~~40~~ ~~53~~	~~10~~ ~~43~~	10	
5	~~43~~	53	~~43~~		33
	0	1	2	3	4

非両立性を見分ける手順

新たに非両立的になった21,31,50,52への推移はない。○をつける。

	遷移先		出力	
	0	1	0	1
q_0	q_5	q_4	0	1
q_1	q_4	q_5	1	1
q_2	q_1	q_4	＊	1
q_3	q_1	＊	＊	＊
q_4	q_0	q_3	1	＊
q_5	＊	q_3	＊	1

1					
2	51 44	~~41~~ ~~54~~			
3	51	~~41~~	11		
4		~~40~~ ~~53~~	~~10~~ ~~43~~	10	
5	~~43~~	53	~~43~~		33
	0	1	2	3	4

見分けられら非両立性

×がついた状態対が非両立的である。これを記号に書くときは、

$q_1 + q_0$　$q_2 + q_1$　$q_3 + q_1$　$q_4 + q_0$　$q_4 + q_1$

$q_4 + q_2$　$q_4 + q_3$　$q_5 + q_0$　$q_5 + q_2$

以上の9つの状態対が非両立的である。

	遷移先		出力	
	0	1	0	1
q_0	q_5	q_4	0	1
q_1	q_4	q_5	1	1
q_2	q_1	q_4	*	1
q_3	q_1	*	*	*
q_4	q_0	q_3	1	*
q_5	*	q_3	*	1

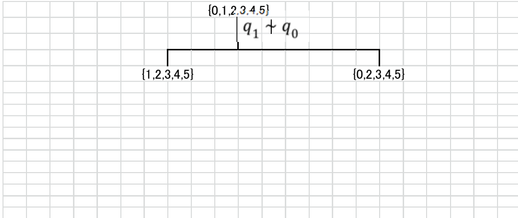
1					
2	51 44	~~41 54~~			
3	51	~~41~~	11		
4		~~40 53~~	~~10 43~~	~~10~~	
5	~~43~~	53	~~43~~		33
	0	1	2	3	4

両立的である状態集合を作る

非両立的でないものは、両立的なので、そこから両立的である集合をつくる。

$q_1 + q_0$　$q_2 + q_1$　$q_3 + q_1$　$q_4 + q_0$　$q_4 + q_1$

$q_4 + q_2$　$q_4 + q_3$　$q_5 + q_0$　$q_5 + q_2$ のうち$q_1 + q_0$に注目して集合を分ける。

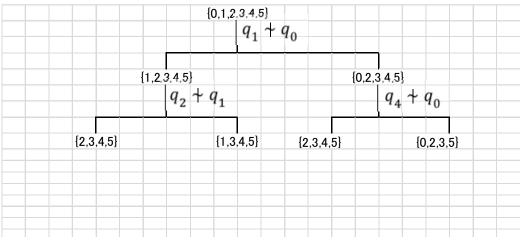


両立的である状態集合を作る

非両立的でないものは、両立的なので、そこから両立的である集合をつくる。

$q_1 + q_0$　$q_2 + q_1$　$q_3 + q_1$　$q_4 + q_0$　$q_4 + q_1$

$q_4 + q_2$　$q_4 + q_3$　$q_5 + q_0$　$q_5 + q_2$

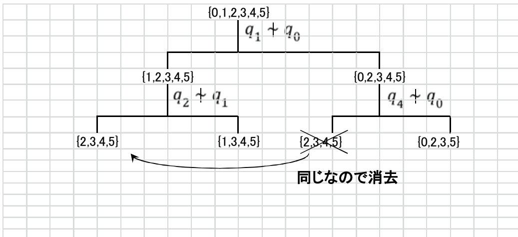


両立的である状態集合を作る

非両立的でないものは、両立的なので、そこから両立的である集合をつくる。

$q_1 + q_0$　$q_2 + q_1$　$q_3 + q_1$　$q_4 + q_0$　$q_4 + q_1$

$q_4 + q_2$　$q_4 + q_3$　$q_5 + q_0$　$q_5 + q_2$

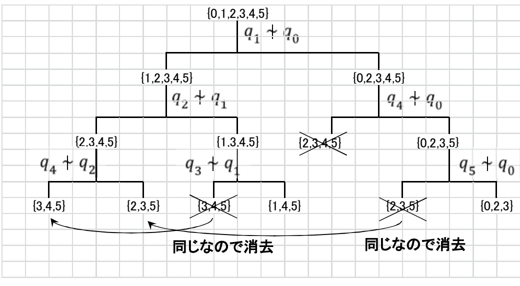


両立的である状態集合を作る

非両立的でないものは、両立的なので、そこから両立的である集合をつくる。

$q_1 + q_0$　$q_2 + q_1$　$q_3 + q_1$　$q_4 + q_0$　$q_4 + q_1$

$q_4 + q_2$　$q_4 + q_3$　$q_5 + q_0$　$q_5 + q_2$

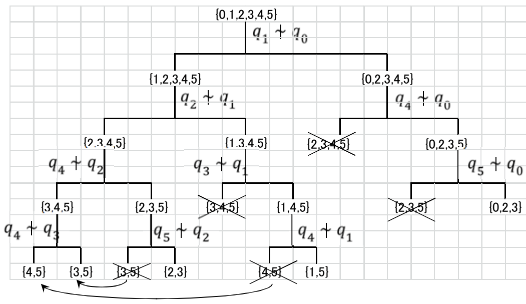


両立的である状態集合を作る

非両立的でないものは、両立的なので、そこから両立的である集合をつくる。

$q_1 + q_0$　$q_2 + q_1$　$q_3 + q_1$　$q_4 + q_0$　$q_4 + q_1$

$q_4 + q_2$　$q_4 + q_3$　$q_5 + q_0$　$q_5 + q_2$

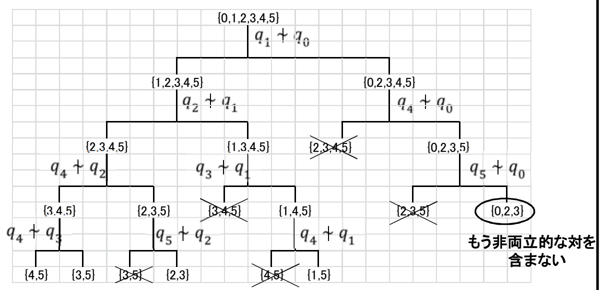


両立的である状態集合を作る

非両立的でないものは、両立的なので、そこから両立的である集合をつくる。

$q_1 + q_0$　$q_2 + q_1$　$q_3 + q_1$　$q_4 + q_0$　$q_4 + q_1$

$q_4 + q_2$　$q_4 + q_3$　$q_5 + q_0$　$q_5 + q_2$

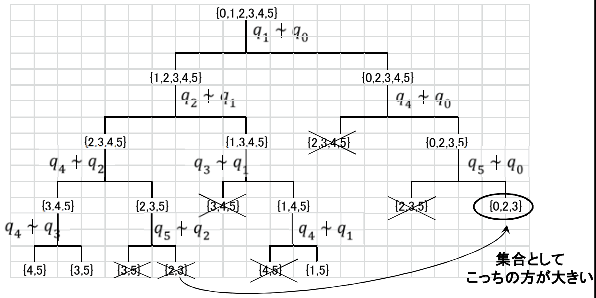


両立的である状態集合を作る

非両立的でないものは、両立的なので、そこから両立的である集合をつくる。

$q_1 + q_0$　$q_2 + q_1$　$q_3 + q_1$　$q_4 + q_0$　$q_4 + q_1$

$q_4 + q_2$　$q_4 + q_3$　$q_5 + q_0$　$q_5 + q_2$

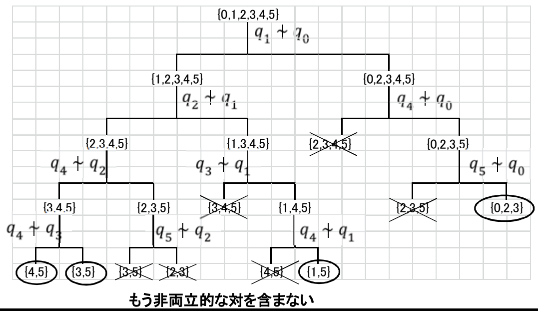


両立的である状態集合を作る

非両立的でないものは、両立的なので、そこから両立的である集合をつくる。

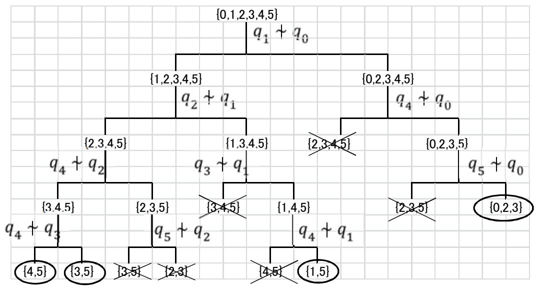
$q_1 + q_0$　$q_2 + q_1$　$q_3 + q_1$　$q_4 + q_0$　$q_4 + q_1$

$q_4 + q_2$　$q_4 + q_3$　$q_5 + q_0$　$q_5 + q_2$



両立的である状態集合を作る

すべての状態がお互いに両立的な集合を両立的状態集合と呼ぶ。ほかの両立的集合に包含されない(できるだけ大きくした)時、極大両立的状態集合と呼ぶ。
以上から、極大両立的状態集合C_mは
$C_{m0}=\{q_0,q_2,q_3\}$、$C_{m1}=\{q_1,q_5\}$、$C_{m2}=\{q_3,q_5\}$、$C_{m3}=\{q_4,q_5\}$の四つである。



両立的である状態集合を作る

すべての状態がお互いに両立的な集合を両立的集合と呼ぶ。ほかの両立的集合に包含されない(できるだけ大きくした）時、極大両立的集合と呼ぶ。
以上から、極大両立的集合C_mは
$C_{m0}=\{q_0,q_2,q_3\}$、$C_{m1}=\{q_1,q_5\}$、$C_{m2}=\{q_3,q_5\}$、$C_{m3}=\{q_4,q_5\}$の四つである。
これですべての状態もカバーしている。
（ここで注意すべきこと。集合は1つしか状態が無いときもある。）

	遷移先		出力	
	0	1	0	1
q_0	q_5	q_4	0	1
q_1	q_4	q_5	1	1
q_2	q_1	q_4	*	1
q_3	q_1	*	*	*
q_4	q_0	q_3	1	*
q_5	*	q_3	*	1

$C_{m0}=\{q_0,q_2,q_3\}$に注目すると、
0が入力すると遷移先はq_1とq_5だからC_{m1}である。
1が入力すると遷移先はq_4だからC_{m3}である。

状態遷移表を作り直す

極大両立的集合 $C_{m0}=\{q_0,q_2,q_3\}$、$C_{m1}=\{q_1,q_5\}$、$C_{m2}=\{q_3,q_5\}$、$C_{m3}=\{q_4,q_5\}$

	遷移先		出力	
	0	1	0	1
q_0	q_5	q_4	0	1
q_1	q_4	q_5	1	1
q_2	q_1	q_4	*	1
q_3	q_1	*	*	*
q_4	q_0	q_3	1	*
q_5	*	q_3	*	1

$C_{m0}=\{q_0,q_2,q_3\}$に注目すると、
0が入力すると遷移先はq_1とq_5だからC_{m1}である。
出力は0または*
1が入力すると遷移先はq_4だからC_{m3}である。
出力は1
ここで

$\tilde{q}_0 = C_{m0}$　　$\tilde{q}_1 = C_{m1}$

$\tilde{q}_3 = C_{m3}$　　$\tilde{q}_2 = C_{m2}$

と定義する。

	遷移先		出力	
	0	1	0	1
$\tilde{q}_0$	$\tilde{q}_1$	$\tilde{q}_3$	0	1
$\tilde{q}_1$				
$\tilde{q}_2$				
$\tilde{q}_3$				

出力も考えると、新しく定義した
状態の遷移状態表は左の様になる。

状態遷移表を作り直す

極大両立的集合 $C_{m0}=\{q_0,q_2,q_3\}$、$C_{m1}=\{q_1,q_5\}$、$C_{m2}=\{q_3,q_5\}$、$C_{m3}=\{q_4,q_5\}$

	遷移先		出力	
	0	1	0	1
q_0	q_5	q_4	0	1
q_1	q_4	q_5	1	1
q_2	q_1	q_4	*	1
q_3	q_1	*	*	*
q_4	q_0	q_3	1	*
q_5	*	q_3	*	1

	遷移先		出力	
	0	1	0	1
$\tilde{q}_0$	$\tilde{q}_1$	$\tilde{q}_3$	0	1
$\tilde{q}_1$	$\tilde{q}_3$	$\tilde{q}_2$	1	1
$\tilde{q}_2$				
$\tilde{q}_3$				

$C_{m1}=\{q_1,q_5\}$に注目すると、
0が入力すると遷移先はq_4だからC_{m3}である。
出力は1または*
1が入力すると遷移先はq_5とq_3だからC_{m2}である。
出力は1
そこで状態遷移表に書きこめる。

状態遷移表を作り直す

極大両立的集合 $C_{m0}=\{q_0,q_2,q_3\}$、$C_{m1}=\{q_1,q_5\}$、$C_{m2}=\{q_3,q_5\}$、$C_{m3}=\{q_4,q_5\}$

	遷移先		出力	
	0	1	0	1
q_0	q_5	q_4	0	1
q_1	q_4	q_5	1	1
q_2	q_1	q_4	*	1
q_3	q_1	*	*	*
q_4	q_0	q_3	1	*
q_5	*	q_3	*	1

	遷移先		出力	
	0	1	0	1
$\tilde{q}_0$	$\tilde{q}_1$	$\tilde{q}_3$	0	1
$\tilde{q}_1$	$\tilde{q}_3$	$\tilde{q}_2$	1	1
$\tilde{q}_2$	$\tilde{q}_1$	$\tilde{q}_0 \vee \tilde{q}_2$	*	1
$\tilde{q}_3$				

$C_{m2}=\{q_3,q_5\}$に注目すると、
0が入力すると遷移先はq_1と＊だから
C_{m1}である。
出力は1*
1が入力すると遷移先はq_3と＊だからC_{m0}またはC_{m2}である。
出力は1または*
状態遷移表に書きこむ。

ここで$\tilde{q}_0 \vee \tilde{q}_2$という表現はどちらでもよいというものである。

状態遷移表を作り直す

極大両立的集合 $C_{m0}=\{q_0,q_2,q_3\}$、$C_{m1}=\{q_1,q_5\}$、$C_{m2}=\{q_3,q_5\}$、$C_{m3}=\{q_4,q_5\}$

	遷移先		出力	
	0	1	0	1
q_0	q_5	q_4	0	1
q_1	q_4	q_5	1	1
q_2	q_1	q_4	*	1
q_3	q_1	*	*	*
q_4	q_0	q_3	1	*
q_5	*	q_3	*	1

	遷移先		出力	
	0	1	0	1
$\tilde{q}_0$	$\tilde{q}_1$	$\tilde{q}_3$	0	1
$\tilde{q}_1$	$\tilde{q}_3$	$\tilde{q}_2$	1	1
$\tilde{q}_2$	$\tilde{q}_1$	$\tilde{q}_0 \vee \tilde{q}_2$	*	1
$\tilde{q}_3$	$\tilde{q}_0$	$\tilde{q}_0 \vee \tilde{q}_2$	1	1

$C_{m3}=\{q_4,q_5\}$に注目すると、
0が入力すると遷移先はq_0と＊だから
C_{m0}である。
出力は1または*
1が入力すると遷移先はq_3だからC_{m0}またはC_{m2}である。
出力は1または*
状態遷移表に書きこむ。

これで両立性をもちいて簡単化した状態遷移表が完成

両立性で状態遷移図を組みなおすときの手順

1.各状態間での非両立性を調べ上げる。
2. 非両立性から、極大両立的状態集合を作る。
3. 極大両立的状態集合を新たな状態に対応させ、状態遷移表を作り直す。

ここでの問題点

各極大両立的状態集合で構成した新たな状態は、状態数として最小になるか？

じつは、ならない例もある。
極大両立的状態集合では、各集合にふくまれる状態に重複があるため、
極大両立的状態集合よりも、すこし小さい集合を使うことで、
つかう状態集合の数(=新たな状態数)を減らせる可能性を持つ。

しかし、そのような例を簡単に求める統一的方法は知られておらず、
一回構成してから各状態を一つづつ除去可能かを試すことによって集合を得る。
そこで本講義ではそのような例は扱わないこととする。