

2014年後期 応用確率統計

⑪ 仮説検定

河野 行雄

kawano@pe.titech.ac.jp

2015年1月8日

復習

■ 尤度関数

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(X_i, \theta)$$

■ 最尤推定量

$$\hat{\theta}^* = \arg \max_{\theta} L(\theta) = \arg \max_{\theta} \log L(\theta)$$

← 漸近不偏、漸近有効 (クラメル・ラオの下界を達成)

■ クラメル・ラオの不等式

$$V(\hat{\theta} | \theta_0) \geq \frac{1}{nI}$$
$$I = E \left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \log f(X, \theta_0) \right)^2 \right] = -E \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log f(X, \theta_0) \right)$$

統計的検定とは？

■ 統計的推測

母数推定(標本平均、最尤推定)

仮説検定、信頼区間、回帰曲線

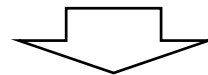
■ 仮説検定

観測されたデータと想定する仮定が一致するかどうかを確認する方法

■ 例

A県で生産されたリンゴの糖度: $X_1, \dots, X_n$

B県で生産されたリンゴの糖度: $Y_1, \dots, Y_m$



標本平均 $\bar{X}, \bar{Y}$ を比べることで平均の糖度が等しいといえるか？

仮説検定の枠組み

■ 観測データ

$$X_i = \theta_1 + \varepsilon_{Xi} \quad (i = 1, \dots, n)$$

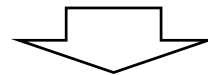
$$Y_j = \theta_2 + \varepsilon_{Yj} \quad (j = 1, \dots, m)$$

$\varepsilon_{Xi}, \varepsilon_{Yi}$ は i.i.d. で平均 0 分散 σ^2 の正規分布 $N(0, \sigma^2)$ に従う

■ 仮説

仮説 H_0 : 「 $\theta_1 = \theta_2$ 」 (帰無仮説、統計的仮説)

仮説 H_1 : 「 $\theta_1 \neq \theta_2$ 」 (対立仮説)



有限の標本数 n, m で判定する枠組み → 仮説検定

検定統計量

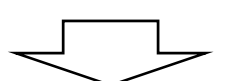
■ 母平均の推定量

$$\hat{\theta}_1 = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad \hat{\theta}_2 = \bar{Y} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m Y_j$$

■ 検定統計量

仮説 H_0 が真 $\rightarrow \bar{Y} - \bar{X}$ は $N\left(0, \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)\sigma^2\right)$ に従う

検定統計量:

$$T \equiv \frac{\bar{Y} - \bar{X}}{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}\sigma} = \sqrt{\frac{nm}{n+m}} \frac{\bar{Y} - \bar{X}}{\sigma}$$


検定統計量は平均 0 分散 1 の正規分布 $N(0,1)$ に従う

仮説の受容と棄却

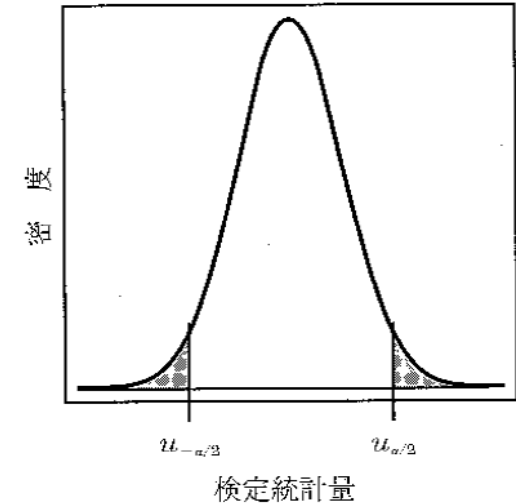
■ 有意水準

判定誤り(過誤)の確率を α とする判定域 μ

$$P(|T| \geq \mu) = \alpha$$

判定域(例: 1.96)

有意水準(例: 0.05)



■ 仮説の受容

$|T| < \mu \longrightarrow$ 仮説 H_0 を受容 「 $\theta_1 = \theta_2$ 」

■ 仮説の棄却

$|T| \geq \mu \longrightarrow$ 仮説 H_0 を棄却 「 $\theta_1 \neq \theta_2$ 」
(確率 α の過誤を含む)

例1

■ 抜き取り検査

ある工場で製造される機械の寿命は平均 θ_0 時間

抜き取られた n 個の機械の寿命は $X_1, \dots, X_n$

仮説 H_0 : 「機械の寿命は θ_0 」 は正しいか？

■ 仮説検定

観測データ: $X_i = \theta_0 + \varepsilon_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad \varepsilon \rightarrow N(0, \sigma^2)$

推定量: $\hat{\theta} = \bar{X}$

検定統計量: $T = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \theta_0)}{\sigma}$

判定: $|T| < \mu = 1.96 \quad \longrightarrow \quad$ 仮説を受容 「 $\theta = \theta_0$ 」

$|T| \geq \mu = 1.96 \quad \longrightarrow \quad$ 仮説を棄却 「 $\theta \neq \theta_0$ 」

分散の検定

■ 観測データ

$$X_i = \theta_0 + \varepsilon_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad \varepsilon \rightarrow N(0, \sigma^2)$$

■ 推定量

$$\hat{\theta} = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (\text{標本平均})$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\theta})^2 \quad (\text{不偏分散})$$

■ 仮説

仮説 H_0 : 「 $\sigma^2 = \sigma_0^2$ 」 (帰無仮説)

仮説 H_1 : 「 $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ 」 (対立仮説)

カイ二乗分布

■ n 個の標準正規分布に従う確率変数の二乗和

$$Y = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2 = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n$$

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} \exp\left(-\frac{z}{2}\right) = \frac{1}{2^{1/2} \Gamma(1/2)} z^{-1/2} e^{-z/2}$$

$$\varphi_Z(t) = \frac{1}{2^{1/2} \Gamma(1/2)} \int_0^\infty z^{-1/2} e^{-(1/2-jt)z} dz = \frac{1}{\sqrt{1-2jt}}$$

$$\varphi_Y(t) = \frac{1}{(1-2jt)^{n/2}}$$

$$p(y) = \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} y^{n/2-1} e^{-y/2} \quad \longleftarrow \text{自由度 } n \text{ のカイ二乗分布}$$

ガンマ関数

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(1) = 1$$

例2

■ ばらつきの年度比較

昨年調べたリンゴの糖度のばらつきは σ_0^2

今年売られているリンゴの糖度は $X_1, \dots, X_n$

仮説 H_0 : 「糖度のばらつき σ^2 は昨年と同じ」 は正しいか？

■ 仮説検定

観測データ: $X_i = \theta_0 + \varepsilon_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad \varepsilon \rightarrow N(0, \sigma^2)$

推定量: $\hat{\theta} = \bar{X}$

検定統計量: $T = \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\theta})^2$  自由度 $n - 1$ の
カイ二乗分布

有意水準: $\int_0^{\mu_1} P(T) dT = \frac{\alpha}{2} \quad \int_{\mu_2}^{\infty} P(T) dT = \frac{\alpha}{2}$

判定: $\mu_1 < T < \mu_2 \quad \longrightarrow \quad$ 仮説を受容

$T \leq \mu_1$ または $T \geq \mu_2 \quad \longrightarrow \quad$ 仮説を棄却

過誤と検出力

■ 仮説

帰無仮説 H_0 : 「 $\theta_1 = \theta_2$ 」

対立仮説 H_1 : 「 $\theta_1 \neq \theta_2$ 」

■ 過誤

第1種の過誤: 帰無仮説が正しいのに対立仮説 → **有意水準 α**

第2種の過誤: 対立仮説が正しいのに帰無仮説 → **検出力 β**

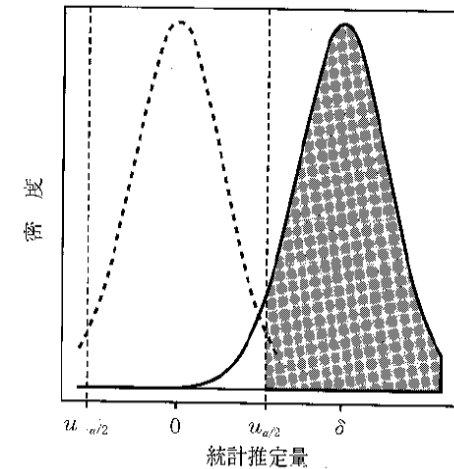
■ 検出力

検出力: 対立仮説が正しいときに帰無仮説を棄却する確率

$$\text{検定統計量: } T \equiv \sqrt{\frac{nm}{n+m}} \frac{\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_1}{\sigma}$$

$\theta_1 \neq \theta_2$ のとき T は $N(\delta, 1)$ に従う

$$\text{検出力: } P(|T| \geq \mu | \delta) \quad \delta = \sqrt{\frac{nm}{n+m}} \frac{\theta_2 - \theta_1}{\sigma}$$



ネイマン・ピアソンの補題

■ 観測データ

$X_1, \dots, X_n$ は i.i.d. で確率密度関数 $f(X, \theta)$ に従う

■ 仮説

帰無仮説 H_0 : 「 $\theta = \theta_0$ 」

対立仮説 H_1 : 「 $\theta = \theta_1$ 」

■ 最適な検定統計量(ネイマン・ピアソンの補題)

検定統計量: $T \equiv \prod_{i=1}^n \frac{f(X_i, \theta_1)}{f(X_i, \theta_0)}$ ← 尤度比検定
検出力を最大化

有意水準: $P(T \geq \mu | \theta_0) = \alpha \longrightarrow T < \mu \text{ or } T \geq \mu$ で判定

まとめ

■ 仮説

帰無仮説 H_0 : 「 $\theta_1 = \theta_2$ 」 「 $\theta = \theta_0$ 」

対立仮説 H_1 : 「 $\theta_1 \neq \theta_2$ 」 「 $\theta = \theta_1$ 」

■ 検定統計量

$$T \equiv \sqrt{\frac{nm}{n+m}} \frac{\bar{Y} - \bar{X}}{\sigma} \quad \leftarrow \text{分散1の正規分布}$$

■ 有意水準

$$P(|T| \geq \mu) = \alpha \quad \leftarrow \text{第一種の過誤}$$

■ 仮説の受容と棄却

$|T| < \mu \quad \longrightarrow \quad \text{帰無仮説を受容} \quad \text{「 } \theta_1 = \theta_2 \text{ 」}$

$|T| \geq \mu \quad \longrightarrow \quad \text{帰無仮説を棄却} \quad \text{「 } \theta_1 \neq \theta_2 \text{ 」}$