平成 26 年度　理学系広域科目「幾何学第二」

多様体の向きとアトラス

講義中に紹介できなかった命題 4.17 の証明を述べる.

$(M, \mathcal{S})$ を n 次元 C^∞ 級多様体とし, $\mathcal{U}$ を M の 1 つのアトラスとする.

定義 4.16　任意の $(U, \varphi), (V, \psi) \in \mathcal{U}$ に対し,

$$\det \left[\frac{\partial y^i}{\partial x^j}(p) \right]_{i,j} > 0 \quad (\forall p \in U \cap V)$$

が成り立つとき, $\mathcal{U}$ は**向きづけられている**という. ここで, $\varphi(p) = (x^1(p), \ldots, x^n(p))$, $\psi(p) = (y^1(p), \ldots, y^n(p))$ $(p \in U \cap V)$ である. $\diamond$

M が向きづけ可能であることをアトラスを用いて言い換えると, 次のようになる.

定理 4.17　M が向きづけ可能であるためには, M の向きづけられたアトラス $\mathcal{U}$ が存在することが必要十分である.

証明　必要であること：$\mu = [(X_1, \ldots, X_n)]$ を M 上の向きとする. 補題 4.11 より, 任意の $p \in M$ に対し, $p \in U$ をみたす $(U, \varphi) \in \mathcal{S}$ が存在し,

$$(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)(X_1, \ldots, X_n)(q) > 0 \quad (\forall q \in U) \quad \cdots\cdots (1)$$

が成り立つ. ここで, $\varphi(q) = (x^1(q), \ldots, x^n(q))$ $(q \in U)$ である. 各 $p \in M$ に対し, このような $(U, \varphi) \in \mathcal{S}$ をとることにより, M のアトラス $\mathcal{U} \subset \mathcal{S}$ を定める. 上のような $(U, \varphi) \in \mathcal{U}$ に対し, $U \cap V \neq \varnothing$ となるような $(V, \psi) \in \mathcal{U}$ を 1 つとる. 補題 4.11 より,

$$(dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n)(X_1, \ldots, X_n)(q) > 0 \quad (\forall q \in V) \quad \cdots\cdots (2)$$

が成り立つ. ここで, $\psi(q) = (y^1(q), \ldots, y^n(q))$ $(q \in V)$ である. また, 命題 2.10 より

$$dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n|_{U \cap V} = \det \left[\frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right]_{i,j} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n|_{U \cap V} \quad \cdots\cdots (3)$$

である. (1), (2), (3) より

$$\det \left[\frac{\partial y^i}{\partial x^j}(q) \right]_{i,j} = \det \left[\frac{\partial y^j}{\partial x^i}(q) \right]_{i,j} > 0 \quad (\forall q \in U \cap V)$$

となる. よって, $\mathcal{U}$ は向きづけられている.

十分であること：$\mathcal{U}$ を M の向きづけられたアトラスとする. 任意に $p \in M$ をとる. $p \in U$ となるような $(U, \varphi) \in \mathcal{U}$ をとり,

$$\mu_p := \left[\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n} \right)_p \right) \right]$$

と定める．ここで, $\varphi(q) = (x^1(q), \ldots, x^n(q))$ $(q \in U)$ である．$p \in V$ となるような別の $(V, \psi) \in \mathcal{U}$ に対し

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p\right) = \left(\left(\frac{\partial}{\partial y^1}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial y^n}\right)_p\right) \left[\frac{\partial y^i}{\partial x^j}(p)\right]_{i,j}$$

が成り立つ．ここで, $\psi(q) = (y^1(q), \ldots, y^n(q))$ $(q \in V)$ である．$\mathcal{U}$ が向きづけられているので, 定義 4.16 より

$$\det \left[\frac{\partial y^i}{\partial x^j}(p)\right]_{i,j} > 0$$

が成り立つ．よって, 定義 4.1, 定義 4.6 より,

$$\mu_p = \left[\left(\left(\frac{\partial}{\partial y^1}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial y^n}\right)_p\right)\right]$$

となる．以上より, $\mu := \{\mu_p\}_{p \in M}$ は M 上の各点ごとの向きとして well-defined である．定め方から μ は連続であるから, μ は M 上の向きである．□