平成 26 年度　理学系広域科目「幾何学第二」

領域不変性について

講義中に紹介できなかった定理 5.3 の証明を述べる.

S を $\mathbb{R}^n$ の部分集合とし, $f : S \to \mathbb{R}^m$ を写像とする.

定義 5.1　任意の $p \in S$ に対し, p の $\mathbb{R}^n$ における開近傍 U と, C^∞ 級写像 $\tilde{f} : U \to \mathbb{R}^m$ が存在して, $\tilde{f}|_{U\cap S} = f|_{U\cap S}$ が成り立つとき, f は (S 上で) $\boldsymbol{C^\infty}$ **級**であるという. $\diamond$

1 の分割を用いることにより, 次を示すことができる.

問 5.2　次の (1) と (2) は同値である：(1) f は S 上で C^∞ 級である. (2) $S \subset U$ となる $\mathbb{R}^n$ の開集合 U と, C^∞ 級写像 $\tilde{f} : U \to \mathbb{R}^m$ が存在して, $\tilde{f}|_S = f$ が成り立つ. $\diamond$

T を $\mathbb{R}^m$ の部分集合とし, $f : S \to T$ を写像とする.

定義　f が全単射であり, f, f^{-1} がそれぞれ S, T 上で C^∞ 級であるとき, f は S から T への $\boldsymbol{C^\infty}$ **級微分同相写像**であるという. $\diamond$

逆関数定理から次の定理が従う.

定理 5.3 (C^∞ 級の**領域不変性**)　U を $\mathbb{R}^n$ の開集合, S を $\mathbb{R}^n$ の部分集合とし, $f : U \to S$ を C^∞ 級微分同相写像とする. このとき, S は $\mathbb{R}^n$ の開集合である.

証明　任意に $q \in S$ をとる. f が全単射であるから, $f(p) = q$ となる $p \in U$ がただ 1 つ存在する. また, f^{-1} が C^∞ 級微分同相写像であるから, 問 5.2 より, $S \subset V$ となる $\mathbb{R}^n$ の開集合 V と, C^∞ 級写像 $g : V \to \mathbb{R}^n$ が存在して, $g|_S = f^{-1}$ が成り立つ. すると,

$$g \circ f = g|_S \circ f = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_U$$

となるので, 写像の微分の性質より $g_{*,q} \circ f_{*,p} = \mathrm{id}_{T_pU}$ となる. 特に, $f_{*,p}$ は単射であり, $\dim T_pU = \dim T_qV = n$ であるから, $f_{*,p}$ は線形同型である. 従って, 逆関数定理より, U における p の開近傍 U_p と, V における q の開近傍 V_q が存在して, $f|_{U_p} : U_p \to V_q$ は C^∞ 級微分同相写像となる. このとき, $q \in V_q = f(U_p) \subset f(U) = S$ である. また, V は $\mathbb{R}^n$ の開集合であり, V_q は V の開集合であるから, V_q は $\mathbb{R}^n$ の開集合である. 以上より, S は $\mathbb{R}^n$ の開集合である. $\square$