微積分からコホモロジーへ

$\mathbb{R}$ の開区間上で定義された実連続関数が原始関数をもつことはよく知られた事実である. では多変数関数の場合はどうであろうか？ とりあえず簡単のため C^∞ 級関数, つまりすべての変数について何回でも偏微分できるような関数について考えてみよう.

まず 2 変数関数からはじめよう. $f : U \to \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合 U 上で定義された C^∞ 級関数とし, $f(x_1, x_2) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$ と表すことにする.

問題 1　次の条件をみたすような C^∞ 級関数 $F : U \to \mathbb{R}$ は存在するか？

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = f_1, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = f_2 \tag{1}$$

もし F が存在するならば, F が C^∞ 級, 特に C^2 級であることから

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}$$

が成り立つので, (1) より次が得られる.

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \tag{2}$$

つまり, (1) をみたすような F が存在するためには, f_1, f_2 の間に (2) が成り立つことが必要である. では, この条件 (2) は F が存在するための十分条件だろうか？

例 2　次の関数 $f : \mathbb{R}^2 - \{0\} \to \mathbb{R}^2$ を考えよう.

$$f(x_1, x_2) = \left(\frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \right)$$

この f が条件 (2) をみたしていることは容易に確かめられる. しかし, 実はこの f に対して (1) を成り立たせるような関数 $F : \mathbb{R}^2 - \{0\} \to \mathbb{R}$ は存在しないのである. 実際, そのような F が存在したと仮定しよう. 1 変数関数 $F(\cos\theta, \sin\theta)$ $(\theta \in [0, 2\pi])$ に微積分の基本定理を用いると, まず次式を得る.

$$\int_0^{2\pi} \frac{d}{d\theta} F(\cos\theta, \sin\theta) d\theta = F(1, 0) - F(1, 0) = 0$$

一方, $F(\cos\theta, \sin\theta)$ を θ について微分すると, 連鎖律と (1) より次を得る.

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} F(\cos\theta, \sin\theta) &= \frac{\partial F}{\partial x_1} \cdot (-\sin\theta) + \frac{\partial F}{\partial x_2} \cdot \cos\theta \\ &= -f_1(\cos\theta, \sin\theta) \cdot \sin\theta + f_2(\cos\theta, \sin\theta) \cdot \cos\theta \\ &= 1 \end{aligned}$$

これは上の積分計算に矛盾する. ■

定義 3　$X \subset \mathbb{R}^n$ が点 $x_0 \in X$ について**星形**であるとは, 任意の $x \in X$ に対して線分 $\{tx_0 + (1-t)x \mid t \in [0, 1]\}$ が X に含まれることである.

定理 4　$U \subset \mathbb{R}^2$ を星形開集合とする. (2) をみたすような U 上の任意の C^∞ 級関数 $f = (f_1, f_2) : U \to \mathbb{R}^2$ に対し, 問題 1 は解をもつ.

証明　簡単のため $x_0 = 0 \in \mathbb{R}^2$ とする. 関数 $F : U \to \mathbb{R}$ を

$$F(x_1, x_2) = \int_0^1 [x_1 f_1(tx_1, tx_2) + x_2 f_2(tx_1, tx_2)]dt \quad ((x_1, x_2) \in U)$$

と定義する. (U が星形であるから $(tx_1, tx_2) \in U$ であり, F は矛盾なく定義されている.) さて, F を x_1 で偏微分すると次のようになる.

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \int_0^1 \left[f_1(tx_1, tx_2) + tx_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(tx_1, tx_2) + tx_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(tx_1, tx_2) \right] dt$$

一方, $tf_1(tx_1, tx_2)$ を t の関数とみて微分すると次を得る.

$$\frac{d}{dt} tf_1(tx_1, tx_2) = f_1(tx_1, tx_2) + tx_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(tx_1, tx_2) + tx_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(tx_1, tx_2)$$

この 2 式と (2) から (1) の左側の式が得られる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_1} &= \int_0^1 \left[\frac{d}{dt} tf_1(tx_1, tx_2) + tx_2 \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(tx_1, tx_2) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(tx_1, tx_2) \right) \right] dt \\ &= [tf_1(tx_1, tx_2)]_{t=0}^1 \\ &= f_1(x_1, x_2) \end{aligned}$$

全く同様に (1) の右側の式

$$\frac{\partial F}{\partial x_2}(x_1, x_2) = f_2(x_1, x_2)$$

を示すことができるので, F が問題 1 の解である. □

例 2 と定理 4 から, 問題 1 の解答は U の「形状」や「位相」によって変わることがわかった. そこで, これ以上 U や f の例をいろいろ探すのはやめにして, U のある**不変量**を定義することにしよう. この不変量は, 条件 (2) の仮定の下で, 問題 1 の答えが (すべての f に対し) 肯定的であるかどうかを判定するための量である.

開集合 $U \subset \mathbb{R}^2$ に対し, U から $\mathbb{R}^k$ への C^∞ 級関数 $\phi : U \to \mathbb{R}^k$ の全体を $C^\infty(U, \mathbb{R}^k)$ とする. これは自然にベクトル空間の構造をもつ. $k = 2$ のときは, $\phi : U \to \mathbb{R}^2$ を U 上のベクトル場とみることができる. (実際, $u \in U$ に対し, ベクトル $\phi(u) \in \mathbb{R}^2$ が定まる.) さて, **勾配**と**回転**

$$\mathrm{grad} : C^\infty(U, \mathbb{R}) \to C^\infty(U, \mathbb{R}^2), \quad \mathrm{rot} : C^\infty(U, \mathbb{R}^2) \to C^\infty(U, \mathbb{R})$$

を次のように定義する.

$$\mathrm{grad}(\phi) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right), \quad \mathrm{rot}(\phi) = \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1}$$

これらは線型写像であり, $\mathrm{rot} \circ \mathrm{grad} = 0$ であることが容易にわかるから, rot の核は grad の像を部分ベクトル空間として含むことがわかる: $\mathrm{Im}(\mathrm{grad}) \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{rot})$. 従って, 商ベクトル空間

$$H^1(U) := \mathrm{Ker}(\mathrm{rot})/\mathrm{Im}(\mathrm{grad}) \tag{3}$$

を考えることができる. Ker(rot) も Im(grad) もどちらも無限次元のベクトル空間であるが, 実は多くの場合 $H^1(U)$ は有限次元になることがわかっている. 定理 4 を H^1 を用いて言い換えれば次のようになる.

$$U \subset \mathbb{R}^2 \text{ が星形開集合} \quad \Longrightarrow \quad H^1(U) = 0 \tag{4}$$

一方, 例 2 からは $H^1(\mathbb{R}^2-\{0\})\neq 0$ であることがわかる. 実は, $H^1(\mathbb{R}^2-\{0\})$ は 1 次元ベクトル空間であり, $H^1(\mathbb{R}^2-\{x_1,\cdots x_k\})$ は k 次元ベクトル空間である. U にある「穴」の数が $H^1(U)$ の次元に一致するのである.

(3) に似た不変量として次の量を考えよう.

$$H^0(U) := \mathrm{Ker}(\mathrm{grad}) \tag{5}$$

ここで, $U\subset\mathbb{R}^k$ $(k\geqq 1)$ は開集合であり, grad は次式で与えられる.

$$\mathrm{grad}(f)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)$$

定理 5　開集合 $U\subset\mathbb{R}^k$ が連結　$\Longleftrightarrow$　$H^0(U)=\mathbb{R}$.

証明　$\mathrm{grad}(f)=0$ とすると, 各 $x_0\in U$ において x_0 の近傍 $V(x_0)$ が存在し, $f(x)=f(x_0)$ $(x\in V(x_0))$ が成り立つ. つまり, f は局所定数である. "$\Longrightarrow$" の証明：U が連結ならば, 集合

$$\{x\in U|f(x)=f(x_0)\}=f^{-1}(f(x_0))$$

は f が連続だから閉集合であり, f が局所定数だから開集合である. 従ってこの集合は U に等しく, f は定数関数である. ゆえに $H^0(U)$ は U 上の定数関数の全体 $\mathbb{R}$ に等しい. "$\Longleftarrow$" の証明：U が連結でないとすると上への C^∞ 級関数 $f:U\to\{0,1\}$ が存在する. このような関数は局所定数だから $\mathrm{grad}(f)=0$ であるが, U 上の定数関数とは線型独立なので, $\dim H^0(U)>1$ となる. □

定理 5 の考えを押し進めていくと, $\dim H^0(U)$ が U の連結成分の数に等しいことがわかる.

さて, 次に 3 変数関数を考えよう. $U\subset\mathbb{R}^3$ を開集合とする. U 上の関数は 3 つの偏導関数をもち, (2) は 3 つの方程式に置き換わる. まず, **勾配**, **回転**, **発散**

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}&:C^\infty(U,\mathbb{R})\longrightarrow C^\infty(U,\mathbb{R}^3)\\ \mathrm{rot}&:C^\infty(U,\mathbb{R}^3)\longrightarrow C^\infty(U,\mathbb{R}^3)\\ \mathrm{div}&:C^\infty(U,\mathbb{R}^3)\longrightarrow C^\infty(U,\mathbb{R})\end{aligned}$$

を次のような線型写像として定義する.

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}(f)&=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)\\ \mathrm{rot}(f_1,f_2,f_3)&=\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2}-\frac{\partial f_2}{\partial x_3},\frac{\partial f_1}{\partial x_3}-\frac{\partial f_3}{\partial x_1},\frac{\partial f_2}{\partial x_1}-\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)\\ \mathrm{div}(f_1,f_2,f_3)&=\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}+\frac{\partial f_3}{\partial x_3}\end{aligned}$$

簡単な計算から, $\mathrm{rot}\circ\mathrm{grad}=0,\ \mathrm{div}\circ\mathrm{rot}=0$ であることがわかるので, (3) や (5) のように $H^0(U)$ や $H^1(U)$ を定義し, 次の式で $H^2(U)$ を定義することができる.

$$H^2(U) := \mathrm{Ker}(\mathrm{div})/\mathrm{Im}(\mathrm{rot}) \tag{6}$$

定理 6　$U\subset\mathbb{R}^3$ を星形開集合とするとき, $H^0(U)=\mathbb{R},\ H^1(U)=0,\ H^2(U)=0$ が成り立つ.

証明　$H^0(U),\ H^1(U)$ についてはすでに述べたので, $H^2(U)=0$ を示すことにする. U が $0\in\mathbb{R}^3$ について星形であるとしても一般性を失わない. $\mathrm{div}F=0$ であるような C^∞ 級関数 $F:U\to\mathbb{R}^3$ に対して, C^∞ 級関数 $G:U\to\mathbb{R}^3$ を

$$G(\mathbf{x})=\int_0^1(F(t\mathbf{x})\times t\mathbf{x})\,dt\quad(\mathbf{x}\in U)$$

によって定義する．ここで, $\times$ はベクトルの外積

$$(f_1, f_2, f_3) \times (x_1, x_2, x_3) = (f_2x_3 - f_3x_2, f_3x_1 - f_1x_3, f_1x_2 - f_2x_1)$$

を表している．直接計算から

$$\mathrm{rot}(F(t\mathbf{x}) \times t\mathbf{x}) = \frac{d}{dx}(t^2F(t\mathbf{x}))$$

となるので, 結局次の式を得る．

$$\mathrm{rot}\, G(\mathbf{x}) = \int_0^1 \frac{d}{dt}(t^2F(t\mathbf{x}))dt = F(\mathbf{x})$$

従って, $F \in \mathrm{Im}(\mathrm{rot})$ である．□

もし $U \subset \mathbb{R}^3$ が星形でなければ, $H^1(U)$ や $H^2(U)$ は 0 になるとは限らない．

例 7　$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1^2 + x_2^2 = 1,\ x_3 = 0\}$ を (x_1, x_2) 平面上の単位円とする．次式で与えられる $U = \mathbb{R}^3 - S$ 上の C^∞ 級関数 $f : U \to \mathbb{R}^3$ を考えよう．

$$f(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{-2x_1x_3}{x_3^2 + (x_1^2 + x_2^2 - 1)^2}, \frac{-2x_2x_3}{x_3^2 + (x_1^2 + x_2^2 - 1)^2}, \frac{x_1^2 + x_2^2 - 1}{x_3^2 + (x_1^2 + x_2^2 - 1)^2} \right)$$

まず $\mathrm{rot}(f) = 0$ であることが直ちにわかるので, f は $H^1(U)$ の元 $[f]$ を定める．S に絡んでいる U 内のある曲線 γ に沿って積分をすることによって, $[f] \neq 0$ を示そう．C^∞ 級曲線 $\gamma : [-\pi, \pi] \to U$ を次のように定める．

$$\gamma(t) = (\sqrt{1 + \cos t},\ 0,\ \sin t) \quad (-\pi \leqq t \leqq \pi)$$

このとき, $\mathrm{grad}(F) = f$ となるような C^∞ 級関数 $F : U \to \mathbb{R}$ が存在すると仮定しよう．まず $F(\gamma(t))$ を t の関数とみて, 微積分の基本定理を用いると

$$\int_{-\pi+\epsilon}^{\pi-\epsilon} \frac{d}{dt}F(\gamma(t))dt = F(\gamma(\pi - \epsilon)) - F(\gamma(-\pi + \epsilon)) \longrightarrow 0 \quad (\epsilon \to 0)$$

となる．一方, $F(\gamma(t))$ を t について微分すると, 連鎖律から

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}F(\gamma(t)) &= f_1(\gamma(t)) \cdot \gamma_1'(t) + f_2(\gamma(t)) \cdot \gamma_2'(t) + f_3(\gamma(t)) \cdot \gamma_3'(t) \\ &= \sin^2 t + 0 + \cos^2 t \\ &= 1 \end{aligned}$$

を得る．これは上の積分計算と明らかに矛盾する．従って, このような F は存在せず, $[f] \neq 0$ である．つまり $H^1(U) \neq 0$ がわかった．■

実は, $H^0(U), H^1(U), H^2(U)$ はそれぞれ U の $0, 1, 2$ 次元の **de Rham コホモロジー群**とよばれるものになっている．

—— I. Madsen and J. Tornehave, *From Calculus to Cohomology* より