電気電子基礎学

現代制御理論　はじめの一歩

（線形空間と可制御・可観測性）

（固有値固有ベクトルと安定性）

制御システム工学科

三平　満司

1.1 状態方程式

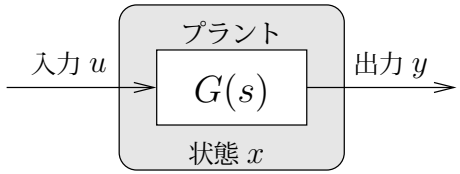

Fig. 1.1: 一般的な入出力関係

Fig.1.1のプラント $G(s)$ に対し，内部状態を表す変数 x を導入し，$G(s)$ の入出力関係を 1 階の常微分方程式で表すと

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \tag{1.1}$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \tag{1.2}$$

($x \in \mathbb{R}^n$:状態　$u \in \mathbb{R}^m$:入力　$y \in \mathbb{R}^p$:出力)

のような状態方程式を得ることができる．

線形な集中定数系 ➜ 一般に，状態方程式で表現可能

1.1 状態方程式

例えば力学においてよくある Fig.1.2のようなバネ・質量・ダンパー系の運動方程式も容易に状態方程式で表わされる．

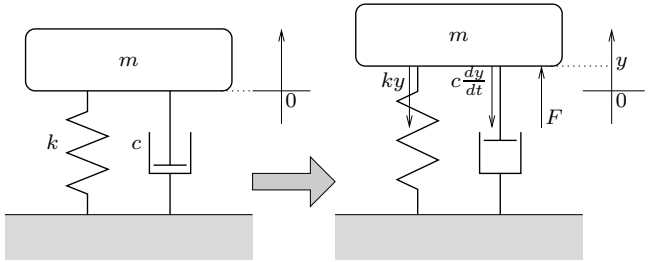

Fig. 1.2: バネ・マス・ダンパー系

Fig.1.2の運動方程式は，バネ定数を k, 質量を m, ダンパーの粘性係数を c, 質量の変位を y, 外力を F として

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + c\frac{dy}{dt} + ky = F \tag{1.3}$$

で表わされる．

1.1 状態方程式

ここでシステムの状態を

$$\text{状態} = \begin{pmatrix} \text{位置} \\ \text{速度} \end{pmatrix}$$

と考える．　➜ 機械系での定石

すなわち

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} y \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

と定義すると

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{dy}{dt} \\ &= x_2 \end{aligned} \tag{1.5}$$

1.1 状態方程式

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_2}{dt} &= \frac{d}{dt}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} \\
&= \frac{d^2y}{dt^2} \\
&= \frac{1}{m}\left(-c\frac{dy}{dt} - ky + F\right) \\
&= -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 + \frac{1}{m}F
\end{aligned} \tag{1.6}
$$

であるから，これらをまとめて

$$
\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} F \tag{1.7}
$$

$$
y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{1.8}
$$

と状態方程式で表わされる．

1.1 状態方程式

状態空間表現の利点 ➜ 多入出力系も容易に扱える．

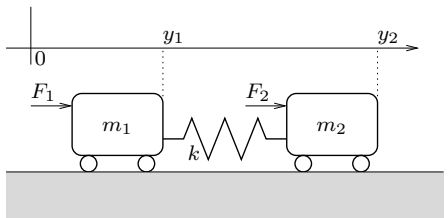

Fig. 1.3: バネ・2 質量系

Fig.1.3の 2 質量系の運動方程式は

$$
m_1\frac{d^2y_1}{dt^2} - k(y_2 - y_1) = F_1 \tag{1.9}
$$

$$
m_2\frac{d^2y_2}{dt^2} + k(y_2 - y_1) = F_2 \tag{1.10}
$$

であるから，同様の変形によりその状態方程式は

1.1 状態方程式

$$
\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \frac{dy_1}{dt} \\ \frac{dy_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{m_1} & \frac{k}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{k}{m_2} & -\frac{k}{m_2} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \frac{dy_1}{dt} \\ \frac{dy_2}{dt} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \tag{1.11}
$$

$$
\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \frac{dy_1}{dt} \\ \frac{dy_2}{dt} \end{pmatrix} \tag{1.12}
$$

となる．

1.3 座標変換

システム (1.1)(1.2)

$$
\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \tag{1.1}
$$

$$
y(t) = Cx(t) + Du(t) \tag{1.2}
$$

における状態はシステムの内部状態を表わしている．

⇩

システムの入出力に直接には現われない．

⇩

状態 x を次の座標変換で $\bar{x}$ に変換する．(T は正則な行列)

$$
x = T\bar{x} \tag{1.26}
$$

1.3 座標変換

状態 $\bar{x}$ を時間微分すれば以下の状態方程式を得る．

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{x}}{dt} &= T^{-1}\frac{dx}{dt} \\ &= T^{-1}(Ax+Bu) \\ &= T^{-1}AT\bar{x}+T^{-1}Bu \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \bar{A}\bar{x}+\bar{B}u \end{aligned} \tag{1.27}$$

また出力方程式は以下のようになる．

$$\begin{aligned} y &= CT\bar{x}+Du \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \bar{C}\bar{x}+\bar{D}u \end{aligned} \tag{1.28}$$

⇩

座標変換によりシステムの状態を変えても，
状態方程式でシステムの挙動を表現可能．

1.4 可制御性，可観測性

(A, B) が可制御である必要十分条件は

$$V \stackrel{\text{def}}{=} \{B, AB, A^2B, \cdots A^{n-1}B\} \tag{1.29}$$

が

$$\operatorname{rank} V = n$$

を満たすことである．
また (C, A) が可観測であるための必要十分条件は

$$N^T \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} \tag{1.30}$$

が

$$\operatorname{rank} N = n$$

を満たすことである．

1.4 可制御性，可観測性

行列の階数を表す rank

⇩ 直感的な説明では...

行列における独立な列ベクトル (行ベクトル) の数

例えば，

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \quad \Rightarrow \quad \text{1 列目と 2 列目は独立なベクトル}$$

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{1 列目と 2 列目は同じベクトル}$$

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \quad \Rightarrow \quad \text{3 列目は 1 列目と 2 列目の線形結合}$$

のように計算できる．

1.4 可制御性，可観測性

システムが可制御でないとき，つまり

$$\operatorname{rank} V = r < n \tag{1.31}$$

のときを考える．このとき V の列ベクトルの中から線形独立なもの r 本を選びこれを $v_1, v_2, \cdots, v_r$ と定義する．
また $n-r$ 本の列ベクトル $v_{r+1}, v_{r+2}, \cdots, v_n$ を

$$T = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_r & v_{r+1} & \cdots & v_n \end{pmatrix} \tag{1.32}$$

が正則になるように選ぶ．

1.4 可制御性，可観測性

この行列 T により座標変換されたシステム

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix} u \tag{1.33}$$

$$y = \begin{pmatrix} \bar{C}_1 & \bar{C}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} + Du \tag{1.34}$$

⇩

状態 $\bar{x}_2$ は入力 u の影響をまったく受けていない．

⇩

$\boxed{\text{このような状態は入力により制御できない}}$

（一般の制御系ではシステムが可制御になるように構成してあるのが普通）

1.4 可制御性，可観測性

例えば，以下のようなシステム

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u \tag{1.35}$$

における可制御性行列 V は，

$$V = \begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.36}$$

⇩ $\operatorname{rank} V = 1$

このシステムは可制御ではない

1.4 可制御性，可観測性

ここで，$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^T$ により行列 T を選ぶ．

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.37}$$

この T により座標変換を行うと，

$$\bar{A} = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.38}$$

$$\bar{B} = T^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.39}$$

となり，座標変換後の状態 $\bar{x}_2$ は入力 u の影響を受けない．

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \tag{1.40}$$

1.4 可制御性，可観測性

またシステムが可観測でないとき，つまり

$$\operatorname{rank} N = r < n \tag{1.41}$$

のときを考える．
このとき N^T の行ベクトルの中から線形独立なもの r 本を選びこれを $w_1^T, w_2^T, \cdots, w_r^T$ と定義する．
また $n-r$ 本の行ベクトル $w_{r+1}^T, w_{r+2}^T, \cdots, w_n^T$ を

$$W = \begin{pmatrix} w_1^T \\ \vdots \\ w_r^T \\ w_{r+1}^T \\ \vdots \\ w_n^T \end{pmatrix} \tag{1.42}$$

が正則になるように選ぶ．

1.4 可制御性，可観測性

行列 $T = W^{-1}$ により座標変換されたシステム

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} & 0 \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{pmatrix} u \tag{1.43}$$

$$y = \begin{pmatrix} \bar{C}_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} + Du \tag{1.44}$$

⇩

状態 $\bar{x}_2$ は出力 y に影響しない．

⇩

出力 y が零になるように制御したとしても
内部の状態が発散してしまうことがある．

1.4 可制御性，可観測性

例えば，先と同じ以下のようなシステム

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u \tag{1.45}$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{1.46}$$

における可観測性行列 N は，

$$N^T = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.47}$$

⇩ $\mathrm{rank}\, N = 1$

このシステムは可観測ではない

1.4 可制御性，可観測性

ここで，$w_1^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$, $w_2^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$ により行列 W を選ぶ．

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad W^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.48}$$

この $W^{-1} = T$ により座標変換を行うと，

$$\bar{A} = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.49}$$

$$\bar{B} = T^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.50}$$

$$\bar{C} = CT = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.51}$$

となり，座標変換後の出力 y は状態 $\bar{x}_2$ の影響を受けない．

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} u \tag{1.52}$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} \tag{1.53}$$

1.5 システムの応答

状態方程式 (1.1) で，$u(t) = 0$ とした微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t)$$

⇩

x の初期値:
$x(0) = x_0$ の解

$$x(t) = e^{At}x_0 \tag{1.54}$$

ここで e^{At} は

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \cdots \tag{1.55}$$

1.5 システムの応答

これは次のように確認することができる．

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}e^{At}x_0 \tag{1.56}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{d}{dt}\left(I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \frac{1}{4!}A^4t^4 + \cdots\right)x_0 \\
&= \left(0 + A + \frac{2}{2!}A^2t + \frac{3}{3!}A^3t^2 + \cdots\right)x_0 \\
&= A\left(I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \cdots\right)x_0 \\
&= Ae^{At}x_0 \\
&= Ax(t) \qquad (1.57)
\end{aligned}$$

e^{At} には以下のような性質がある．(ただし T は正則な行列 (複素行列も可))

$$e^{A0} = I \tag{1.58}$$

$$e^{A(t_1+t_2)} = e^{At_1}e^{At_2} \tag{1.59}$$

$$e^{At} = Te^{T^{-1}ATt}T^{-1} \tag{1.60}$$

1.5 システムの応答

式 (1.60) は，

$$\begin{aligned}
(T^{-1}AT)^i &= T^{-1}ATT^{-1}AT\cdots T^{-1}ATT^{-1}AT \\
&= T^{-1}A^iT
\end{aligned}$$

を利用することで，

$$\begin{aligned}
&Te^{T^{-1}ATt}T^{-1} \\
&= T\left\{I + (T^{-1}AT)t + \frac{1}{2!}(T^{-1}AT)^2t^2 + \frac{1}{3!}(T^{-1}AT)^3t^3\cdots\right\}T^{-1} \\
&= T\left\{I + (T^{-1}AT)t + \frac{1}{2!}(T^{-1}A^2T)t^2 + \frac{1}{3!}(T^{-1}A^3T)t^3\cdots\right\}T^{-1} \\
&= T\left\{T^{-1}\left(I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \cdots\right)T\right\}T^{-1} \\
&= e^{At}
\end{aligned}$$

のように確認することができる．

1.5 システムの応答

もし A が対角行列 Λ

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{1.61}$$

であるならば

$$\begin{aligned}
e^{\Lambda t} &= I + \Lambda t + \frac{1}{2!}\Lambda^2t^2 + \cdots \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} t + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \lambda_n^2 \end{pmatrix} t^2 \\
&\quad + \cdots
\end{aligned}$$

1.5 システムの応答

$$= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \tag{1.62}$$

となる．

⇩ T を $T^{-1}AT$ が対角になるように選ぶ

e^{At} の各要素の関数を求めることが可能
($T^{-1}AT$ の対角要素は A の固有値となっている)

1.6 システムの安定性

$Av = \lambda v$ が成り立つベクトル $v(\neq 0)$ が存在するとき，

λ ： A の固有値
v ： λ に対する固有ベクトル

$$\begin{aligned}\{Av = \lambda v, \quad v \neq 0\} &\Leftrightarrow \{(\lambda I - A)v = 0, \quad v \neq 0\} \\ &\Leftrightarrow \lambda I - A \text{ が逆行列を持たない} \\ &\Leftrightarrow \det(\lambda I - A) = 0\end{aligned}$$

つまり...

$\det(\lambda I - A) = 0$ を解くと，固有値 λ を求めることができる．

例えば，$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値は？

$\det(\lambda I - A) = 0$ を満たす λ は，

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 0 & \lambda - 2 \end{pmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2) \tag{1.64}$$

より，$\lambda = 1$ または 2 である．

1.6 システムの安定性

$\lambda = 1$ のとき，

$$(\lambda I - A)v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} v = 0 \tag{1.65}$$

$$\Downarrow$$

$\lambda = 1$ に対する固有ベクトルは $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda = 2$ のとき，

$$(\lambda I - A)v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v = 0 \tag{1.66}$$

$$\Downarrow$$

$\lambda = 2$ に対する固有ベクトルは $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

1.6 システムの安定性

行列の対角化とは？

行列 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ が相異なる場合，

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} Av_1 & Av_2 & \cdots & Av_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 & \cdots & \lambda_n v_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & & \cdots & \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.67, 1.68}$$

より，

1.6 システムの安定性

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & & \cdots & \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{1.69}$$

のように行列 A を対角化できる．

例えば，$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ の対角化は？

固有値 $\lambda_1 = 1$ に対する固有ベクトル $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

固有値 $\lambda_2 = 2$ に対する固有ベクトル $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

を用いると

1.6 システムの安定性

$$A\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.70}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \tag{1.71}$$

より，以下のように対角化できる．

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \tag{1.72}$$

1.6 システムの安定性

入力 $u(t) = 0$ の場合のシステムの応答は

$$y(t) = Ce^{At}x_0 \tag{1.73}$$

となる．
厳密さを求めなければ，直感的に以下のような考え方ができる．

$$\lim_{t\to\infty} e^{At} = 0 \tag{1.74}$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0 \tag{1.75}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\text{システムは安定}}$$

1.6 システムの安定性

そこで正則な複素行列 T を

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \Lambda \tag{1.76}$$

を満たすように選べると仮定する．(λ_i は行列 A の固有値)
この Λ を用いれば以下のようになる．

$$e^{At} = Te^{\Lambda t}T^{-1}$$

$$= T\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}T^{-1} \tag{1.77}$$

1.6 システムの安定性

よって

$$\lim_{t\to\infty} e^{At} = 0 \tag{1.78}$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{t\to\infty} e^{\lambda_i t} = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{1.79}$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{1.80}$$

であることが分かる．

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{行列 } A \text{ の固有値の実部が負であれば} \\ \text{システムは安定}\end{array}}$$

1.7 システムの安定性

いま状態 x が利用できるとする．このとき入力を

$$u = Fx + v \tag{1.85}$$

とすれば，状態方程式は

$$\frac{dx}{dt} = (A + BF)x + Bv \tag{1.86}$$

となる．($v \in \mathbb{R}^m$ は新しい入力)
状態フィードバックされた閉ループ系の安定性

⇩

$(A + BF)$ の固有値に依存

⇩

$\boxed{\text{システムの安定化 システムの極を変更}}$ が状態フィードバックで可能

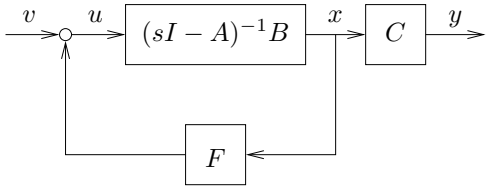

Fig. 1.4: 状態フィードバック

1.7.1 極配置問題

極配置問題 · · · $\boxed{\text{フィードバック行列 } F \text{ を選ぶことにより，閉ループ系の極を任意の与えられた値にすること}}$

⇩ 1 入力可制御な系では · · ·

望ましいシステムの極を $p_1, p_2, \cdots, p_n$ として，
$(A + BF)$ の特性多項式 $\det(sI - A - BF)$ が

$$\begin{aligned}\det(sI - A - BF) &= (s - p_1)(s - p_2)\cdots(s - p_n) \\ &\overset{\text{def}}{=} s^n + \mu_{n-1}s^{n-1} + \mu_{n-2}s^{n-2} + \cdots + \mu_1 s^1 + \mu_0\end{aligned} \tag{1.87}$$

となるような F を求める問題となる．

μ_i が実数となるように p_i が選ばれていると仮定

⇩

$p_i = \xi_i + j\eta_i$, $\eta_i \neq 0$ $\Rightarrow$ $p_j = \xi_i - j\eta_i$ も与えられた極に含まれている

1.7.1 極配置問題

例えば，システム

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \tag{1.88}$$

の極を $-1, -2$ とする状態フィードバック F は？

$u = Fx = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \end{pmatrix} x$ とすると，

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ f_1 & f_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{1.89}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 + f_1 & 1 + f_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{1.90}$$

1.7.1 極配置問題

$\boxed{\text{フィードバック系の特性多項式}}$

$$\det(sI - A - BF) = s^2 - (1 + f_2)s - (1 + f_1) \tag{1.91}$$

⇕ 係数比較

$\boxed{\text{望ましいフィードバック系の特性多項式}}$

$$(s + 1)(s + 2) = s^2 + 3s + 2 \tag{1.92}$$

➜求めるフィードバック行列は $F = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \end{pmatrix}$