# 制度設計特論講義ノート（東工大大学院講義2014後期)

平成 26 年 11 月 28 日版

## 1　Farkas の補題とその応用

### 1.1　数学的準備

本講義では集合 $S_1$，$S_2$ において $S_1 \subset S_2$ と書くとき，$S_1$ は $S_2$ の真部分集合であることを表す. $S_1 = S_2$ を含む時は $S_1 \subseteq S_2$ で表す.

**実数の集合の上限と下限**　実数の部分集合 $S$ において，$S$ のすべての要素以上の数で最小の数を $S$ の**上限 (supremum)** と呼び $\sup(S)$ で表す．$S$ のすべての要素以下の数で最大の数を $S$ の**下限 (infimum)** と呼び $\inf(S)$ で表す.

**ベクトルの演算**　実数空間を $\mathbb{R}$ と書き，$n$ 次元（ユークリッド）空間を $\mathbb{R}^n$ で表す．$n$ 次元ベクトル $x \in \mathbb{R}^n$ が与えられたとき，$x_i$ は第 $i$ 成分を表すものとする．$n$ 次元ベクトル $x \in \mathbb{R}^n$ と実数 $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して，ベクトルの実数倍を $\lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$ とする.

本来は，$n$ 次元ベクトル $x \in \mathbb{R}^n$ は縦ベクトルと横ベクトルを区別する必要がある．例えば $x, y \in \mathbb{R}^n$ としたとき，$x$ が横ベクトル,$y \in \mathbb{R}^n$ が縦ベクトルであれば，$xy$ はベクトルの内積を表し

$$xy = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

となるし，また $x$ が縦ベクトル,$y \in \mathbb{R}^n$ が横ベクトルであれば，$xy$ は $n \times n$ 行列

$$xy = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \ldots & x_1y_n \\ & \vdots & & \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \ldots & x_ny_n \end{pmatrix}$$

となる．しかし煩雑になるため本書では縦ベクトルと横ベクトルを区別せずに，ベクトルや行列の積を書いた時は，ベクトルや行列の前に書かれているものは横ベクトルで，後に書かれているものは縦ベクトルとみなす．すなわちベクトルの積 $xy$ は，$x$ と $y$ の内積を表し, 行列 $A$ に対して，$yA$ の $y$ は縦ベクトル，$Ax$ の $x$ は縦ベクトルとみなすものとする．$a^1, a^2, \ldots, a^n \mathbb{R}^m$ を $m$ 次元ベクトルとし，$A = (a^1, a^2, \ldots, a^n)$ と書いた場合，$a^i$ は縦ベクトルとみなし，$A$ は $m \times n$ 行列であると考える.

**ベクトルの一次結合**　$a^1, a^2, \ldots, a^n \in \mathbb{R}^m$ とする．ある $n$ 個の実数 $(x_1, \ldots, x_n)$ に対してベクトル $y \in \mathbb{R}^m$ が

$$y = \sum_{i=1}^{n} x_i a^i$$

と書けるとき，$y$ は $a^1, a^2, \ldots, a^n$ の **1 次結合 (linear combination)** で表わされるという．

$A$ を $m \times n$ 行列とし，$A = (a^1, a^2, \ldots, a^n)$ とする．このとき span(A) を $a^1, a^2, \ldots, a^n$ のの 1 次結合で表わされる空間，すなわち

$$\mathrm{span(A)} = \{y \in \mathbb{R}^m | \exists x \in \mathbb{R}^n, y = Ax\}$$

とする．また cone(A) を $a^1, a^2, \ldots, a^n$ の正の 1 次結合で表わされる空間，すなわち

$$\mathrm{cone(A)} = \{y \in \mathbb{R}^m | \exists x \geq 0, x \in \mathbb{R}^n, y = Ax\}$$

とする．

**ベクトルの大小**　$x, y \in \mathbb{R}^n$ の大小関係を，各成分を用いて，以下のように定義する．

$$\begin{array}{lcll}
x = y & \Leftrightarrow & x_i = y_i & \forall i \in \{1, \ldots, n\} \\
x \geq y & \Leftrightarrow & x_i \geq y_i & \forall i \in \{1, \ldots, n\} \\
x > y & \Leftrightarrow & x_i \geq y_i & \forall i \in \{1, \ldots, n\} \quad \text{かつ} \quad \text{少なくとも 1 つの } j \text{ に対して } x_j > y_j \\
x \gg y & \Leftrightarrow & x_i > y_i & \forall i \in \{1, \ldots, n\}
\end{array}$$

**ベクトルの距離**　2 つの $n$ 次元ベクトル $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対して，その距離を $d(x, y)$ で表すことにし，

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

とする．$x \in \mathbb{R}^n$ において $d(0, x)$ を $x$ の**ノルム (norm)** と呼び $\|x\|$ と書く．

**閉集合と開集合**　$S$ を $n$ 次元の部分集合とする．すべての $k$ に対し $x^k \in S$ である点列 $\{x^k\}$ を $\{x^k\} \subseteq S$ と書くことにする．$x$ に収束する任意の点列 $\{x^k\} \subseteq S$ に対して，$x \in S$ であるとき $S$ は**閉集合 (closed set)** であると言う．また，どんな $x \in S$ に対しても，ある $\epsilon > 0$ が存在して，$d(x, y) < \epsilon$ となるすべての $y$ が $y \in S$ となるならば，$S$ は**開集合 (open set)** であると呼ぶ．

開集合と閉集合には以下の定理が成り立つ．証明はしない．他の本を参照せよ．

**定理 1.1.** 開集合の補集合は閉集合であり，閉集合の補集合は開集合となる．

**区間**　**区間 (interval)** を以下のように定義する:

$$
\begin{aligned}
&[a,b] = \{x \in R | a \le x \le b\},\\
&[a,b) = \{x \in R | a \le x < b\},\\
&(a,b] = \{x \in R | a < x \le b\},\\
&(a,b) = \{x \in R | a < x < b\},
\end{aligned}
$$

$[a,b]$ を**閉区間 (closed interval)**，$(a,b)$ を**開区間 (open interval)**，$a < b$ のとき $[a,b]$ は閉集合，$(a,b)$ は開集合である．

**有界**　集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ が**有界 (bounded)** であるとは，ある正の数 $r$ が存在して，任意の $x \in S$ に対して $\|x\| \le r$ となるときを言う．$S$ が有界で閉集合のとき，$S$ は**コンパクト (compact)** であるという．

**関数の連続性**　関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を考える．$f$ が点 $a \in \mathbb{R}^n$ で**連続 (continuous)** であるとは，任意の $\epsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して，$d(x,a) < \delta$ であるようなすべての $x \in \mathbb{R}^n$ に対して $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ となることである．

また $f$ が集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ 上で連続であるとは，すべての点 $a \in S$ と任意の $\epsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して，$d(x,a) < \delta$ であるようなすべての $x \in S$ に対して $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ となることである．

上記の「ある点での連続」と「ある集合上での連続」の違いに注意せよ.「$d(x,a) < \delta$ であるようなすべての $x$」に対して，点での連続性は「すべての $x \in \mathbb{R}^n$」としており，集合での連続性は「すべての $x \in S$」としている．

**問題 1.2.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して，点 $x = 0$ では連続ではないが，集合 $[0,1]$ では連続であるような例を考えてみよ．

上記の集合での連続の定義は，点での連続の定義とずれが生じる．つまり $S = \{a\}$ とし，$a$ で不連続な関数 $f$ を考えると，$f$ は点 $a$ では不連続であるが集合 $S$ では連続である．関数 $f$ が $[a,b]$ において，点 $a$ では不連続であるが $S = [a,b]$ で連続の場合，関数 $f$ は $S$ で最大値を持つ．上記の連続の定義は定義域で関数が最大値を持つための条件と似ているように感じられる．(2013 年：岸本くんの指摘)

**関数の最大値と最小値**　関数 $f$ の集合 $S$ における最大値を $\max_{x \in S} f(x)$，最小値を $\min_{x \in S} f(x)$ と書く．また $S$ 上で $f$ の最大値，最小値を与える点の集合をそれぞれ，$\mathrm{argmax}_{x \in S} f(x)$，$\mathrm{argmin}_{x \in S} f(x)$ と書く．

本講義では「均衡の存在」が大きな興味であり．均衡の存在のためには，少なくともある関数（利得関数，効用関数）の最大値が存在していなければならない．つまり本講義においては「最大値の存在」は重要な問題である．

以下の定理は，最大値の存在を保証する重要な定理である．証明は（それほど難しくはないが）ここでは行わない．他の本を参考にせよ．

**定理 1.3** (Weierstrass の最大値定理)**.** $S \subseteq \mathbb{R}^n$ をコンパクト集合とし，$f$ を $S$ 上で連続な関数であるとする．このとき $\mathrm{argmax}_{x \in S} f(x)$，$\mathrm{argmin}_{x \in S} f(x)$ が存在し，両方とも $S$ に含まれる．

**問題 1.4.** 次の条件で，$\mathrm{argmax}_{x \in S} f(x)$ が $S$ 上に存在しない例を示せ．

*(1)* $f$ は連続で，$S$ は有界だが，閉集合ではない．

*(2)* $f$ は連続で，$S$ は閉集合だが，有界ではない．

*(3)* $S$ はコンパクトだが，$f$ は不連続．

## 1.2 分離超平面定理

**定義 1.5** (凸集合)**.** 集合 $C \subseteq \mathbb{R}^n$ が，任意の $x, y \in C$ と任意の $\lambda \in [0, 1]$ に対して，$\lambda x + (1-\lambda) y \in C$ を満たすとき，$C$ は**凸集合 (convex set)** であると言う．

凸集合は，閉集合の時も，開集合の時もある．

**補助定理 1.6.** $C$ を 0 を含まない閉集合とする．このとき $d(x^0, 0) = \inf_{x \in C} d(x, 0) > 0$ となるある $x^0 \in C$ が存在する．

*Proof.* 任意の $y \in C$ を選び，$C' = C \cap \{x \in C | d(x, 0) \leq d(y, 0)\}$ とすれば，閉集合の共通部分は閉集合であり，$C'$ は有界となるから，$C'$ はコンパクトである．$d(x, 0)$ は $x$ に関して連続な関数であり，$C'$ はコンパクトであるから，$d(x^0, 0) = \min_{x \in C'} d(x, 0)$ となる点 $x^0$ が存在する．この点は $x^0$ は $C$ に属し，明らかに $d(x, 0)$ を最小とする点でもある． □

**定義 1.7** (超平面)**.** $h \in \mathbb{R}^n$ と $\beta \in R$ に対して，$H = \{x \in \mathbb{R}^n | hx = \beta\}$ を**超平面 (hyper plane)** と言い $H = (h, \beta)$ と書く．$\{x \in \mathbb{R}^n | hx \leq \beta\}$ を**半空間 (half set)** と言う．

**定理 1.8** (分離超平面定理)**.** $C$ を閉凸集合とし，$b \in \mathbb{R}^n$ が $b \notin C$ であるとする．このとき，任意の $x \in C$ に対して，$hb < \beta < hx$ であるような超平面 $(h, \beta)$ が存在する．

*Proof.* $x' = x - b$ と座標を変換して考えれば良いので，以下 $b = 0$ であるとして証明する．補助定理 1.6 から $d(x^0, 0) = \min_{x \in C} d(x, 0)$ となるような $x^0 \in C$ が存在する．

$m = \frac{x^0}{2}$ としよう．0 と $x^0$ を結んだ線に直交して $x^0$ を通るような超平面を $(h, \beta)$ とし，この超平面が $C$ と 0 を分離することを示せば良い．具体的には $h = x^0 / d(x^0, 0)$，$\beta = hm$ とすれば良い．ここで $hm = d(x^0, 0)/2$ となることが分かる．

ここで

$$hb = h \cdot 0 = 0 < d(x^0, 0)/2 = \beta$$

であり，

$$hx^0 = x^0 \frac{x^0}{d(x^0, 0)} = d(x^0, 0) > d(x^0, 0)/2 = \beta$$

であるから，$hb < \beta < hx^0$ であることが分かる．

$x^0$ ではない任意の $x \in C$ を考える．$hx > \beta$ を示せば良い．$C$ が凸集合であるから，任意の $\lambda \in [0,1]$ に関して $(1-\lambda)x^0 + \lambda x \in C$ である．$x^0$ の選び方から $d(x^0,0) \leq d((1-\lambda)x^0 + \lambda x, 0)$ である．したがって，両辺を二乗して $d(x^0,0)^2 \leq d((1-\lambda)x^0 + \lambda x, 0)^2$ である．

$$\begin{aligned} d((1-\lambda)x^0 + \lambda x, 0)^2 &= d(x^0 + \lambda(x - x^0), 0)^2 \\ &= d(x^0,0)^2 + 2\lambda x^0(x - x^0) + \lambda^2 d(x - x^0, 0) \end{aligned}$$

であることから

$$2\lambda x^0(x - x^0) + \lambda^2 d(x - x^0, 0) \geq 0$$

となる．$\lambda$ はいくらでも小さく取れるので，

$$\lambda x^0(x - x^0) \geq 0$$

でなければならない．これより $x^0 x \geq d(x^0,0)^2$ となるので

$$hx = \frac{x^0 x}{d(x^0,0)} \geq d(x^0,0) > \frac{d(x^0,0)}{2} = \beta$$

より $hx > \beta$ が言えた． □

**補助定理 1.9.** $A$ を $m \times n$ 行列とする．このとき cone(A) は凸集合となる．

*Proof.* 任意の $y, y' \in$ cone(A) を考える．ある $x, x' \geq 0$ が存在して，$y = Ax$,$y' = Ax'$ である．したがって，任意の $\lambda \in [0,1]$ に対して

$$\lambda y + (1-\lambda)y' = \lambda Ax + (1-\lambda)Ax' = A(\lambda x + (1-\lambda)x')$$

である．$\lambda x + (1-\lambda)x' \geq 0$ であるから，$A(\lambda x + (1-\lambda)x') \in$ cone(A) である． □

**補助定理 1.10.** $A$ を $m \times n$ 行列とする．このとき cone(A) は閉集合となる．

cone が閉集合であることを示すのは，難しくはないが少々面倒である．ここでは証明は省略する．Vohra (2004) の補助定理 3.9 などを参照してほしい．

## 1.3 Farkas の補題とその証明

**定理 1.11** (Farkas の補題)**.** 任意の $m \times n$ 行列 $A$ と任意の $b \in \mathbb{R}^m$ に対して，

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}, \quad Y = \{y \in \mathbb{R}^m | yA \geq 0, yb < 0\}$$

とする．$X \neq \emptyset$ か $Y \neq \emptyset$ のどちらか一方が成立し，かつ両方が成立することはない．

*Proof.* まず両方が成立することはないことを示す．$Ax = b$ かつ $x \geq 0$ であるような $x \in \mathbb{R}^n$ と，$yA \geq 0$ であるような $y \in \mathbb{R}^m$ が存在するならば，

$$yb = y(Ax) = (yA)x \geq 0$$

となり $yA < 0$ とはならない．したがって，$X \neq \emptyset$ ならば $Y = \emptyset$ であり，両方は成立しない．

次に $X = \emptyset$ ならば $Y \neq \emptyset$ を示す．$X = \emptyset$ ならば，$b \notin \mathrm{cone(A)}$ である．cone(A) は閉凸集合であるから (補助定理 1.9，1.10)，定理 1.8 より $b$ と cone(A) を分離するある超平面 $(h, \beta)$ が存在し，任意の $z \in \mathrm{cone(A)}$ に対して，$hb < \beta < hz$ とできる．$0 \in \mathrm{cone(A)}$ より $\beta < 0$ である．

$a^j$ を $A$ の $j$ 番目の縦ベクトル（列ベクトル）とする．このとき $ha^j \geq 0$ である．これを示すために $ha^j < 0$ と仮定する．このとき任意の $\lambda \geq 0$ に関して $\lambda a^j \in \mathrm{cone(A)}$ であることから，$h(\lambda a^j) > \beta$ である．一方，$ha^j < 0$ であるから $\lambda$ を十分に大きくすると $h(\lambda a^j)$ は $\beta$ より小さくなる．これは矛盾である．

したがって任意の $j$ に関して $ha^j \geq 0$ となるので $hA \geq 0$ である．$h$ を $y$ と考えることができ $Y \neq \emptyset$ であると言える． □

## 1.4 Farkas 補題の応用 (1):裁定，リスク中立確率，オプション価格

### 1.4.1 裁定とリスク中立確率

ファイナンス理論において最初に学ぶのは，以下のような現在と将来の 2 時点（1 期間）での証券市場のモデルである．

いま，$m$ 個の証券があるとする．これらが将来において取る状態は不確実であり，$n$ 個の状態を取るとする．現在の証券 $i$ の価格を $p_i$ とし，証券 $i$ の状態 $j$ での証券価格を $a_{ij}$ で表す（証券の配当はないものとする）．$A = (a_{ij})$ とすると，$A$ は $m \times n$ 行列となる．

$m$ 個の証券の組合せをポートフォリオと呼び，$y \in \mathbb{R}^m$ で表す．ポートフォリオは，証券の正の保有比率を考える場合と（$y \geq 0, \sum_{i=1}^m y_i = 1$），保有単位数を考えて符号制約をしない場合とがある．ここでは後者を考える．$y_i > 0$ の場合は，証券 $i$ を**現物所有 (long position)** していることを表し，$y_i < 0$ の場合は，証券 $i$ を**空売り (short position)** している場合を表す．

現在の証券価格を $p = (p_1, \ldots, p_m)$ で表すとしよう．このとき（弱い意味での）無裁定条件を以下のように定義する．

**定義 1.12.** 現在の証券価格 $p \in \mathbb{R}^m$ と 1 期間後の証券価格 $A$ に対して，無裁定の条件が成り立つとは，任意のポートフォリオ $y \in \mathbb{R}^m$ に対して $yA \geq 0$ ならば，$yp \geq 0$ が成り立つことを言う．

反対にあるポートフォリオ $y \in \mathbb{R}^m$ が存在して，$yA \geq 0$ かつ $yp < 0$ となるとき，裁定が存在すると言う．

裁定が存在するとは「自己資金がなくても，いくらでも巨額の富を得ることができる」ことを指す．**タダ飯 (free lunch)** とか，**マネーポンプ (money pomp)** とか，さまざまな呼び方をされる．

**例 1.13.** 今，1 期間後の状態数が 2 つの場合を考える．1 つの証券を考え，現在の証券価格 100 円で，1 期間後に状態 1 では 150 円，状態 2 では 200 円になるとしよう．

このような状態は「裁定が起きている」と間違いを犯しやすい．この証券を 100 円で買えば，少なくとも 1 期間後には 150 円以上になっているので，この証券を大量に買えば大量に儲かるからである．しかし裁定は，このように「無リスクで *1* 期間後にお金を増やすことができる」ことではないことに注意が必要である．そもそも無危険資産が存在すれば，それに大量に投資すれば無リスクで *1* 期間後にお金を大量に増やすことはできる．しかしそれは裁定ではない．

上記の状態を．定義に従って裁定が起きていると言わないことを確認しよう．$p = 100$，$A = (150, 200)$ とし，ポートフォリオ *(*この場合 $y \in \mathbb{R}$*)* に対して $yA \geq 0$ となれば $y \geq 0$ であるから，必ず $yp = 100 \geq 0$ となり $yp < 0$ とはならない．裁定の概念の説明において,「自己資金がなくても」と言う部分があったが，証券が 1 つしかない場合には自己資金なしに証券を買うことができず，空売りすることしかできないからである．

このような市場に，以下のように「債権」もしくは「無危険資産」と呼ばれる証券を 1 つ加えれば，裁定となる．今，100 円を 1 期間預ければ，105 円となるような債権（利子率 5%）を考える．このような債権は，現在の価格が 100 円で，将来の価格が状態 1,2 で共に 105 円となる証券であると考えることができる．2 証券の 1 期間後の証券価格を

$$A = \begin{pmatrix} 150 & 200 \\ 105 & 105 \end{pmatrix}$$

で表し，証券価格を $p = (100, 100)$ とすれば，このような状況を表現することができる．このときたとえば $y = (1, -1.2)$ とすれば (証券を 1 単位買うために，自己資金を作るために少し多め 1.2 単位のお金を借り，1 期間後に返す)，$yA = (24, 74) \geq 0$（1 単位の証券を買った儲けから利子分 26 円を返還），$yp = -20 < 0$ となり裁定が生じる．

無裁定であるということは，言い換えると $yA \geq 0$ で，かつ $yp < 0$ となるようなポートフォリオ $y \in \mathbb{R}^m$ が存在しないということである．したがって Farkas 補題より以下のことが成り立つ．

**命題 1.14.** 証券価格 $p \in \mathbb{R}^m$ と 1 期間後の証券価格 $A$ に対して，無裁定の条件が成り立つならば，$x \geq 0$ であるような $x \in \mathbb{R}^n$ が存在して $Ax = p$ とできる．

もし $p > 0$ であれば，$\sum_{j=1}^n x_j \neq \quad 0$ である．この場合は $\sum_{j=1}^n x_j$ によって，証券価格と $x$ を正規化できて $p^* = p/\sum_{j=1}^n x_j$，$x^* = x/\sum_{j=1}^n x_j$ とできる．この $x^*$ は $\sum_j^n x_j^* = 1$，$x_j \geq 0$ を満たすのであたかも確率であるかのように見える．実際に

$$p_j^* = \sum_{j=1}^n x_j^* a_{ij}$$

であるから，$x^*$ を確率としてみなすと（正規化された）証券 $i$ の現在の価格は任意の証券 $i$ の 1 期間後の期待値として表すことができる．

$x^*$ を確率としてみなすとリスク中立的な人の期待効用が証券 $i$ の現在の価格となることから，$x^*$ を**リスク中立確率 (risk neutral probability)** と呼ぶ．無裁定条件はリスク中立確率の必要十分条件であることが Farkas の補題より分かる．

### 1.4.2 オプションの価格付けと Black–Scholes の式

オプションと呼ばれる金融商品の理論価格は Black–Scholes の式と呼ばれ，Black，Scholes，Merton によって考えだされた．このオプションの価格理論は，先の節で説明したリスク中立確率の応用として考えることができる．

オプションとは最初に定められた価格で，証券を買ったり，売ったりする権利である．証券を買う権利を**コールオプション (call option)**，証券を売る権利を**プット・オプション (put option)** という．また，ある期間までの定められた期間のいつでも権利を行使できるものは**アメリカン・オプション (American option)**，定められた期間が過ぎたその時点でのみ権利を行使できるものは**ユーロピアン・オプション (Europian option)** という．ここでは，**ユーロピアン・コール・オプション (European call option)** というオプションについて説明しよう．

ある証券のユーロピアン・コール・オプションは**行使価格 (strike price)** $K$ というものが決められていて，定められた期間が過ぎた時点において，オプション権利を行使すれば $K$ を支払うことででその証券が購入できる（行使しなければ，何も支払わず何も購入しない）.「このオプションを売買するとしたならば，価格はいくらになるか」というのがオプションの価格理論である．

2 時点 1 期間モデルで，この問題を定式化してみよう．1 期間の状態は 2 つとし，第 1 状態を good，第 2 状態を bad とする．現在の証券価格を $S^0$ とし，第 1 状態では証券の価格は $uS^0$ になり，第 2 状態では $dS^0$ になるとして，$u > 1 > d$ とする．また無危険資産が存在するとし，その利子率を $r$

とし，$R = 1 + r$ としよう．無危険資産を金額 $B$ だけ借りると，1 期間後には $RB$ で返済しなければならない．

ここでこの証券のユーロピアン・コール・オプションを考え，行使価格を $K$ とする．このオプションは 1 期間後の証券価格が $K$ よりも高ければ行使され，そうでなければ行使されないと考えられるので，オプションの 1 期間後の価格は，第 1 状態では $\max\{0, uS^0 - K\}$, 第 2 状態では $\max\{0, dS^0 - K\}$ であると考えられるだろう．したがって，証券，無危険資産，オプションからなる証券価格の行列 $A$ は

$$A = \begin{pmatrix} uS^0 & dS^0 \\ \max\{0, uS^0 - K\} & \max\{0, dS^0 - K\} \end{pmatrix}$$

となる．

もし市場が無裁定であれば，あるリスク中立確率 $\pi = (\pi_1, \pi_2)$ が存在して

$$\begin{pmatrix} S^0 \\ B \\ p^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} uS^0 & dS^0 \\ RB & RB \\ \max\{0, uS^0 - K\} & \max\{0, dS^0 - K\} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix}$$

が成り立つ．

最初の 2 つの方程式は

$$uS^0\pi_1 + dS^0\pi_2 = S^0$$
$$RB\pi_1 + RB\pi_2 = B$$

となるので，これを解いて

$$\pi_1 = \tfrac{R-d}{R(u-d)} \quad \pi_2 = \tfrac{u-R}{R(u-d)}$$

となる．

非負のリスク中立確率 $\pi = (\pi_1, \pi_2)$ が存在する必要十分条件は $u \geq R \geq d$ である．もしこれが成り立たず $R \leq d$ であれば，無危険資産に価値はなく，証券をどんどん買えば良い（無危険資産を売って，証券をたくさん買えば裁定取引ができる）．また $u \leq R$ の場合は，逆に証券に価値はなく，無危険資産をどんどん買えば良い（証券をたくさん空売りして，無危険資産を買えば裁定取引ができる）．

非負のリスク中立確率 $\pi = (\pi_1, \pi_2)$ が存在する時は，

$$p^* = \pi_1 \max\{0, uS^0 - K\} + \pi_2 \max\{0, dS^0 - K\} \tag{1}$$

となる．オプション価格は式 (1) で決定される．

この式は確率微分方程式を用いて導出される Black–Scholes の式の原理を，1 期間 2 状態として分かりやすく表現したもので，Cox, Ross and Rubinstein (1979) によって導かれたものして知られている．

## 1.5 演習 1

**演習 1.1.** 次の集合が凸集合であることを証明せよ.

**(1)** $[a, b]$

**(2)** $(a, b)$

**(3)** $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$

**(4)** $\{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$

**(5)** $C_1, \ldots, C_m$ を凸集合の族としたときの共通部分 $\cap_{i=1}^m C_i$

**演習 1.2.** 以下の 2 つの場合について，span(A) と cone(A) を 2 次元平面に図示せよ.

**(1)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

**(2)** $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

**演習 1.3.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ とする．$b = (2, 2)$ とするとき，*Farkas* の補題を用いて $yA \geq 0$, $yb < 0$ となる解が存在しないことを示せ.

**演習 1.4.** $n \times n$ 行列 $A$ が，すべての $i, j$ に対して $a_{ij} \geq 0$ を満たし，$\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1$ をすべての $j = 1, \ldots, n$ に対して満たすとき $A$ をマルコフ行列と呼ぶ．$a_{ij}$ は状態 $j$ から状態 $i$ への推移確率を表している．このとき $Ax = x$，$\sum_{i=1}^n x_i = 1$ を満たす $x$ を定常確率ベクトルと呼ぶ．*Farkas* の補題を用いて，すべてのマルコフ行列が定常確率ベクトルを持つことを証明せよ.

**演習 1.5.** （演習 *1.5*，*1.6* を変更しました）*2* 時点 *2* 証券の *2* 状態モデルで，以下のように 1 単位あたりの証券価格が与えられたとする.

| | 時点 0 | 時点 1 | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 状態 1 | 状態 2 | |
| 証券 *1* | 1 | $R$ | $R$ | （無危険資産） |
| 証券 *2* | $S$ | $uS$ | $dS$ | |

- 問 *1* 裁定機会がある条件と，ない条件を $u, d, R$ の式で示せ.
- 問 *2* また裁定がある場合に，時点 0 でどのようなポートフォリオを組めば裁定の利益が得られるか.
- 問 *3* この市場におけるリスク中立確率を求めよ.
- 問 *4* この市場の証券 *1* に対する権利行使価格 $K$ のコール・オプションを考え，時点 0 における価格を決定せよ.

## 1.6 Farkas 補題の応用 (2):線形計画法

線形計画法と Farkas の補題は，密接な関わりを持っている．ここでは Farkas の補題から線形計画法を眺めることになるのだが，もし線形計画法の学習を中心にするならば，そこにおける重要な定理の系として，Farkas の補題を学ぶことになる．

線形計画法に詳細に述べると，分量が多くなってしまうので，Farkas の補題に必要な部分のみ述べることにする．詳細は線形計画法の文献などを参照せよ．

### 1.6.1 線形計画問題

$c \in \mathbb{R}^n$，$b \in \mathbb{R}^m$, $m \times n$ 行列 $A$ に対して，以下の問題 $(P)$ を**線形計画問題 (linear prgramming problem)** と言う．

$$
(P) \quad \begin{array}{ll} \max & cx \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}
$$

$cx$ を**目的関数 (objective function)** と呼び，$Ax = b$，$x \geq 0$ を**制約条件 (constraints)** と呼ぶ．この問題は $X = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$ とすると $\max_{x \in X} cx$ を求める問題であると言える．

$Ax = b, x \geq 0$ を満たす解が存在しない時，すなわち $X = \emptyset$ のとき線形計画問題は**実行不可能 (infeasible)** であると呼ぶ．解が存在するとき（$X \neq \emptyset$）のときは，線形計画問題は**実行可能 (feasible)** であると呼び，その解 $x \in X$ を**実行可能解 (feasible solution)** と呼ぶ．

線形計画問題の目的関数の値がいくらでも大きくなるとき，つまりどんな $t$ に対してもある実行可能解 $x \in X$ が存在して $cx \geq t$ とできるとき，線形計画問題は**非有界 (unbounded)** であると言う．

線形計画問題が実行可能で非有界でないとき場合は，$cx^* = \max_{x \in X} cx$ となる解が存在する．$x^*$ を**最適解 (opitmal solution)** と呼び，$cx^*$ を**最適値 (optimal value)** と呼ぶ．

### 1.6.2 線形計画問題の標準形への変換

線形計画問題 $(\tilde{P})$ が，

$$
(\tilde{P}) \quad \begin{array}{ll} \max & cx \\ \text{s.t.} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}
$$

の形をしているとき，**スラック変数 (slack variable)**$s = (s_1, \ldots, s_m)$ を使うことで，問題 $(P)$ の形式に変換することができる．ここで $\tilde{x} = (x, s) = (x_1, \ldots, x_n, s_1, \ldots, s_m)$ とし，$I_m$ を $m \times m$ の単位行列として

$$
\tilde{A} = (A, I_m) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 1 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & 0 & & 1 \end{pmatrix}
$$

とすると，問題 $(\tilde{P})$ は

$$
(P') \quad \begin{array}{ll} \max & cx \\ \text{s.t.} & \tilde{A}\tilde{x} = b \\ & \tilde{x} \geq 0 \end{array}
$$

に変換できる．つまり，問題 $(\tilde{P})$ の実行可能解 $x$ は，$s = b - x$ とすれば問題 $(P')$ の実行可能解 $(x, s)$ に対応する．このことから次のことが成り立つ．

**命題 1.15.** 問題 $(\tilde{P})$ の最適解 $x^*$ に対して，$s^* = b - x^*$ とすれば $(x^*, s^*)$ は問題 $(P')$ の最適解であり，$(x^*, s^*)$ が問題 $(P')$ の最適解であれば $x^*$ は問題 $(\tilde{P})$ の最適解である．

証明は演習とする．問題 $(P)$ は線形計画問題の標準形と呼ばれ，問題 $(\tilde{P})$ は基準形と呼ばれる．

**Farkas 補題の変形**　この変形は Farkas の補題にも応用することができる．任意の $m \times n$ 行列 $A$ と任意の $b \in \mathbb{R}^m$ に対して，上記の $\tilde{A}$，$\tilde{x}$ を考える．Farkas の補題より，$\tilde{X} = \{x \in \mathbb{R}^n | \tilde{A}\tilde{x} = b, \tilde{x} \geq 0\}$，$\tilde{Y} = \{y \in \mathbb{R}^m | y\tilde{A} \geq 0, yb < 0\}$ とすると，$\tilde{X} \neq \emptyset$ か $\tilde{Y} \neq \emptyset$ のどちらか一方が成立し，かつ両方が成立することはない．

ここで $y\tilde{A} \geq 0$ という条件は，$yA \geq 0$ と $y \geq 0$ という 2 つの条件に書きなおすことができる．したがって以下の定理を得る．

**定理 1.16** (Farkas の補題（不等式系）)**.** 任意の $m \times n$ 行列 $A$ と任意の $b \in \mathbb{R}^m$ に対して，

$$
X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b,\ x \geq 0\}, \quad Y = \{y \in \mathbb{R}^m \mid yA \geq 0,\ y \geq 0,\ yb < 0\}
$$

とする．$X \neq \emptyset$ か $Y \neq \emptyset$ のどちらか一方が成立し，かつ両方が成立することはない．

**さらに一般的問題の標準形，基準形への変換**　一般には，Farkas の補題と線形計画法の双方において，等号制約ではなく不等号制約が混在したり，非負制約がない変数が混在する場合も，以下の変形によって，非負変数の等号制約に変換することができる．

- すでに示したように，$\sum_j a_{ij}x_j \leq b_i$ の形の制約は，スラック変数 $s_i$ を追加して，$\sum_j a_{ij}x_j + s_i = b_i$，$s_i \geq 0$ の等号制約に変換できる．
- 同様に $\sum_j a_{ij}x_j \geq b_i$ の形の制約は，**サープラス変数 (surplus variable)**$s_i$ を追加して，$\sum_j a_{ij}x_j - s_i = b_i$，$s_i \geq 0$ の等号制約に変換できる．
- $x$ が非負制約がない変数の場合は，$x = x^+ - x^-$ として，2 つの非負変数 $x^+ \geq 0$，$x^- \geq 0$ の和として表すことで，非負変数の問題に変換可能である．
- 線形計画問題では，目的関数の最小化，最大化は，$-1$ をかけることで互いに変換できる．

したがって，制約条件に等号と（両向きの）不等号が混在し，非負制約もある変数とない変数が混在している，どのような線形計画問題（Farkas の補題）も同値な標準形に変換することが可能である．

**例 1.17.** 以下の不等式制約の領域

$$\begin{array}{lcl} 2x_1 + x_2 - x_3 & = & 4 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 & \geq & -3 \\ x_1 + 8x_2 & \leq & 2 \\ x_1 \geq 0, x_3 \geq 0 & & \end{array}$$

は，サープラス変数 $s_1 = x_1+x_2+3x_3-(-3)$，スラック変数 $s_2 = 2-(x_1+8x_2)$ を加え，$x_2 = x_2^+ - x_2^-$ となる非負変数 $x_2^+$,$x_2^-$ に分解することで，

$$\begin{array}{lcl} 2x_1 + x_2^+ - x_2^- - x_3 & = & 4 \\ x_1 + x_2^+ - x_2^- + 3x_3 - s_1 & = & -3 \\ x_1 + 8x_2^+ - 8x_2^- + s_2 & = & 2 \\ x_1 \geq 0, x_2^+ \geq 0, x_2^- \geq 0, x_3 \geq 0, s_1 \geq 0, s_2 \geq 0 & & \end{array}$$

と標準形に変形することができる．

このような変形を施すことにより，すべての線形の等式と不等式領域の存在問題は Farkas の補題で考えることができる．

### 1.6.3 双対定理

線形計画法の双対定理は Farkas の補題とほとんど同じ命題で，双対定理から Farkas 補題を導くことも，Farkas 補題から双対定理を導くこともできる．

$c \in \mathbb{R}^m$，$b \in \mathbb{R}^n$，$A$ を $m \times n$ 行列とするとき，線形計画問題 $(P)$（最大化問題）に対して，以下の標準形の線形計画問題 $(D)$（最小化問題）を定義する．

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \max & cx \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad (D) \quad \begin{array}{ll} \min & yb \\ \text{s.t.} & yA \geq c \end{array}$$

このとき，$(P)$ を**主問題 (primal)**，$(D)$ を**双対問題 (dual)** と呼ぶ．

またここで，双対問題に関して，前章で書いた基準形への変形を使うことで，双対問題 $(D)$ を主問題と考えた時の双対問題を考えることができ，それは主問題 $(P)$ に対応することが分かる．つまり，双対問題の双対問題は主問題となる（演習）．

問題 $(P)$ と問題 $(D)$ の実行可能解を任意に選び $x$，$y$ とすると，

$$cx \leq (yA)x = y(Ax) = yb$$

である．したがって（最適解は実行可能解であるから）問題 $(P)$ の最適解を $Z_P$，問題 $(D)$ の最適解を $Z_D$，とすると $Z_P \leq Z_D$ であることがすぐ分かる．これは**弱双対定理 (weak duality theorem)** と呼ばれる．

$Z_P \leq Z_D$ から主問題の最適値のほうが大きいことが分かるが，この差はどのくらいあるかというと，実は一致し $Z_P = Z_D$ であることが証明できる．これを**双対定理 (duality theorem)** と言う．（**強双対定理 (strong duality theorem)** とも言う）．

双対定理の証明のためには，次の線形計画法の２つの性質について，証明をしておく必要がある．

**命題 1.18. (i)** $(P)$ が非有界ならば，$(D)$ は実行不可能である．

**(ii)** $(P)$ が実行不可能ならば，$(D)$ は実行不可能か非有界である．

*Proof.* **(i) の証明** $(D)$ は実行可能であると仮定する．すると，ある実行可能解 $y$ が存在し，$Z_D \leq yb$ である．問題 $(P)$ の任意の実行可能解を $x$ とすると，

$$cx \leq (yA)x = y(Ax) = yb$$

である．したがって $Z_P \leq yb$ であり，$(P)$ が非有界であることに矛盾する．

**(ii) の証明** $(D)$ が実行不可能でも非有界でも，どちらでもないと仮定すると，最適解 $y^*$ が存在して $Z_D = y^*b$ は有限の値をとる．また，最適解は実行可能であるから $y^*A \geq c$ である．

$(P)$ が実行不可能なので Farkas の補題により，ある $\hat{y}$ が存在して，$\hat{y}A \geq 0$ かつ $\hat{y}b < 0$ を満たす．ここで $y^* + \hat{y}$ は $(y^* + \hat{y})A = y^*A + \hat{y}A \geq 0$ であり，$(D)$ で実行可能であり，$(y^* + \hat{y})b = y^*b + \hat{y}b < y^*b = Z_D$ であるから，$y^*$ が最適解であることに矛盾する． □

同様にして以下のことも証明できる．

**命題 1.19. (i)** $(D)$ が非有界ならば，$(P)$ は実行不可能である．

**(ii)** $(D)$ が実行不可能ならば，$(P)$ は実行不可能か非有界である．

**定理 1.20** (双対定理)**.** $(P)$ が最適解を持つならば，$(D)$ も最適解を持ち，$Z_P = Z_D$ である．

*Proof.* $(P)$ が最適解を持つならば，$(D)$ も最適解を持つ．(なぜならば $(D)$ が最適解を持たないと，$(D)$ は実行不可能か非有界であることになるから，命題 1.19 より，$(P)$ が最適解を持つことに矛盾する.)

$Z_P$ が最適値であることから，任意の $\epsilon > 0$ について，

$$\begin{aligned} &cx \geq Z_P + \epsilon \\ &Ax = b \\ &x \geq 0 \end{aligned}$$

を満たす $x$ は存在しない．

ここで最初の式を $-cx \leq -Z_P - \epsilon$ と考え, $s \in R$ をスラック変数として加えると，上記の不等式系は

$$\begin{aligned} &-cx + s = -Z_P - \epsilon \\ &Ax = b \\ &x \geq 0,\ s \geq 0 \end{aligned}$$

と書けるので，これに Farkas の補題を適用することで，ある $y$ と $\lambda \in R$ が存在して，

$$\begin{aligned} &-\lambda c + yA \geq 0 \\ &\lambda(-Z_P - \epsilon) + yb < 0 \\ &\lambda \geq 0 \end{aligned} \tag{2}$$

となる．ここで $\lambda > 0$ である．なぜなら $\lambda = 0$ とすると，$yA \geq 0$，$yb < 0$ となるような $y$ が存在することになるが，すると Farkas の補題より $Ax = b, x \geq 0$ となる $x$ が存在しないことになり，それは $(P)$ が実行不可能であることを示すから，$(P)$ が最適解を持つことに矛盾する．

ここで $y' = y/\lambda$ とおく．式 (2) の第 1 式より $y'A \geq 0$ となるから，$y'$ は $(D)$ の実行可能解であり，式 (2) の第 2 式より $y'b < Z_P + \epsilon$ を満たす．$y'$ は $(D)$ の実行可能解ならば $Z_D \leq y'b$ だから，

$$Z_P \leq Z_D \leq y'b < Z_P + \epsilon$$

となる．$\epsilon > 0$ は任意に取れるので，$Z_P = Z_D$ であることが分かる． □

**基準形の双対定理**　線形計画問題 $(\tilde{P})$

$$(\tilde{P}) \quad \begin{array}{ll} \max & cx \\ \text{s.t.} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

の双対問題を考え，双対定理を書きなおしておく．Farkas 補題の不等式系で用いた変形を使うことでこの問題の双対問題は，

$$(\tilde{D}) \quad \begin{array}{ll} \max & yb \\ \text{s.t.} & yA \geq c \\ & y \geq 0 \end{array}$$

となることが分かる．

問題 $(\tilde{P})$ の最適値を $Z_{\tilde{P}}$，問題 $(\tilde{D})$ の最適値を $Z_{\tilde{D}}$ とすると，以下の定理を得る．

**定理 1.21** (双対定理（基準形）)**.** 問題 $(\tilde{P})$ が最適解を持つならば，問題 $(\tilde{D})$ も最適解を持ち，$Z_{\tilde{P}} = Z_{\tilde{D}}$ である．

**相補スラック定理**　双対定理から，以下の定理が導ける．この定理は一般の制約付き最適化問題における KKT 条件 (Karush-Kuhn-Tucker 条件) 条件に相当するものである．

**定理 1.22** (相補スラック定理)**.** $x^*$ と $y^*$ を問題 $(P)$ と問題 $(D)$ の実行可能解とする．このとき，$x^*$ と $y^*$ が最適解である必要十分条件は，任意の $j = 1, \ldots, n$ において，

$$\begin{array}{lll} (1) & x_j^* > 0 & \Rightarrow \ \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* = c_j \\ (2) & \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* > c_j & \Rightarrow \ x_j^* = 0 \end{array} \tag{3}$$

の 2 つが成り立つことである．

この条件 (1)(2) は，少し見にくいので，説明を加えよう．$x^*$ が実行可能解であることから，$x_j \geq 0$ と，$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* \geq c_j$ は常に成り立っている．したがってこの条件が意味するところは，任意の $j = 1, \ldots, n$ において，$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* = c_j$ か $x_j = 0$ のどちらかが成り立つ（両方成り立つこともある）ことを示している．

これは書き換えると

$$(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^* - c_j)x_j = 0 \quad \forall j = 1, \ldots, n \tag{4}$$

が成り立つことと同値であり，これを行列とベクトルで表すと，$(y^*A - c)x^* = 0$ となる．

相補性スラック定理は，式 (3) の形で使う時も，式 (4) の形で使う時もある．

*Proof.* （必要性）$x^*$ と $y^*$ を最適解とすると，双対定理から $y^*b = cx^*$ であり，$Ax^* = b$ なので

$$(y^*A - c)x^* = (y^*A)x^* - cx^* = y^*(Ax^*) - cx^* = y^*b - cx^* = 0$$

となる．よって条件 (1)(2) が成り立つ．

（十分性）実行可能解 $x^*$ と $y^*$ に条件 (1)(2) が成り立つとすると，$y^*b - cx^* = (y^*A - c)x^* = 0$ なので，$y^*b = cx^*$ である．もし $cx^*$ が最適解でなければ，ある実行可能解 $\hat{x}$ が存在して $c\hat{x} > cx^*$ となるが，

$$c\hat{x} > cx^* = y^*b = y^*A\hat{x}$$

となり，$c\hat{x} > y^*A\hat{x}$ となる．しかし $y^*A \geq c$，$\hat{x} \geq 0$ であるから，この式は矛盾する． □

## 1.7 Farkas 補題の応用 (3):協力ゲームにおけるコアの存在

**協力ゲーム (cooperative game)** は，プレイヤーの集合 $N = \{1, \ldots, n\}$ と，提携から実数値への関数 $v : 2^N \to \mathbb{R}$ の 2 つの組 $(N, v)$ によって定義される．$v$ を特性関数と呼ぶ．ここで簡便のため $v(\emptyset) = 0$ であるとしておく．

協力ゲーム $(N, v)$ において，$x \in \mathbb{R}^n$ が，$\sum_{j \in N}^{n} x_j = v(N)$ と任意の $j \in N$ に対して $x_j \geq v(\{j\})$ を満たすとき，$x$ は**配分 (imputation)** であると言う．

協力ゲーム $(N, v)$ における**コア (core)** は以下のように定義される：

$$C(v, N) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{j \in N} x_j = v(N),\ \sum_{j \in S} x_j \geq v(S),\ \forall S \subset N \right\}$$

(注:$S \subset N$ は真部分集合を表す，$N$ を含む時は $S \subseteq N$ で表す．)

ここで線形計画問題

$$(Core_P) \quad \begin{array}{ll} \min & \sum_{j \in N} x_j \\ \text{s.t.} & \sum_{j \in S} x_j \geq v(S) \quad \forall S \subset N \end{array}$$

を考える．もし上記の問題の最適解 $x^*$ に対する最適値 $Z_P$ が $Z_P = \sum_{j \in N} x_j^* \leq v(N)$ を満たせば，$C(v, N) \neq \emptyset$ である．(実際，$j \in N$ に対して $x_j^* + (v(N) - \sum_{j \in N} x_j^*)/n$ とすると，それはコアの配分となる)．またある $x \in C(v, N)$ が存在すれば上記の問題の実行可能解であるから，最適解 $x^*$ と最適値 $Z_P$ に対して $Z_P = \sum_{j \in N} x_j^* \leq \sum_{j \in N} x_j = v(N)$ である．したがって $Z_P \leq v(N)$ はコアが存在する必要十分条件である．

上記の線形計画問題の双対問題は，

$$(Core_D) \quad \begin{array}{lll} \max & \sum_{S \subset N} y_S v(S) & \\ \text{s.t.} & \sum_{S \in \mathcal{S}_j} y_S = 1 & \forall j \in N \\ & y_S \geq 0 & \forall S \subset N \end{array}$$

となる．ただしここで

$$\mathcal{S}_j = \{S \subset N | j \in S\}$$

である．双対定理（$Z_P = Z_D$）よりこの問題の最適値 $Z_D$ が $Z_D \leq v(N)$ となることが $C(v, N) \neq \emptyset$ の必要十分条件である．これから以下の定理を得る．

**定理 1.23.**

$$Y = \{y_S \mid \sum_{S \in \mathcal{S}_j} y_S = 1\ \forall j \in N,\ y_S \geq 0\ \forall S \subset N\}$$

とすると，$C(v, N) \neq \emptyset$ の必要十分条件は，

$$v(N) \geq \sum_{S \subset N} y_S v(S) \qquad \forall y_S \in Y,$$

である．

## 1.8 Farkas 補題の応用 (4)：2 人ゼロ和ゲームのミニマックス定理

2 人ゼロ和ゲームは,

- プレイヤーは 1 と 2 で,
- プレイヤー 1 の戦略の集合 $S_1 = \{1, \ldots, m\}$，プレイヤー 2 の戦略の集合 $S_2 = \{1, \ldots, n\}$
- プレイヤー 1 が $i \in S_1$，プレイヤー 2 が $j \in S_2$ を選択したとき，プレイヤー 1 の利得を $a_{ij}$，プレイヤー 2 の利得を $-a_{ij}$

として与えられるゲームである．

各プレイヤーの混合戦略を $p = (p_1, \ldots, p_m)$，$q = (q_1, \ldots, q_n)$ とすると，各プレイヤーの利得は $pAq$，$-pAq$ として与えられる．そこで，プレイヤー 1 は $pAq$ を最大化し，プレイヤー 2 は $pAq$ を最小化するプレイヤーであると考えることができる．ここで混合戦略の集合を

$$\Delta(S_1) = \{p | p \geq 0,\ \textstyle\sum_{i=1}^m p_i = 1\} \quad \Delta(S_2) = \{q | q \geq 0,\ \textstyle\sum_{j=1}^n v_j = 1\}$$

とする．

2 人ゼロ和ゲームの解はマキシミニ戦略，ミニマックス戦略である．各プレイヤーは悲観的で，自分の選んだ戦略に対して，いつも自分の利得が最小になるように相手が行動していると考える．ゼロ和ゲームでは，自分の利得が小さくなると，相手の利得は大きくなるので，自分の選んだ戦略に対して,「相手は自分の利得が小さくなるように行動している」と考えることは,「相手は，相手自身の利得が最大になるように行動している」と考えることと，同じであることに注意したい．

プレイヤー 1 は，自分が（混合）戦略 $p$ を選ぶと，プレイヤー 2 は常に最小の戦略 $j$ を選ぶとし，その最小値を $v_1$ とすると，

$$\textstyle\sum_{i=1}^m a_{ij} p_i \geq v_1 \tag{5}$$

が成り立つ (プレイヤー 2 の混合戦略を考えてないように見えるが，プレイヤー 2 はどんな混合戦略を用いても $v_1$ より利得を小さくすることはできないので，これで良い)．

したがって，プレイヤー 1 は以下の問題 $(ZeroGame_D)$ を解けば良い．

$$(ZeroGame_D) \quad \begin{array}{lll} \max & v_1 & \\ \text{s.t.} & \sum_{i=1}^m a_{ij} p_i \geq v_1 & j = 1, \ldots, n \\ & \sum_{i=1}^m p_i = 1 & \\ & p_i \geq 0 & i = 1, \ldots, m \end{array}$$

同様に，プレイヤー 2 は以下の問題 $(ZeroGame_P)$ を解けば良い．

$$(ZeroGame_P) \quad \begin{array}{lll} \min & v_2 & \\ \text{s.t.} & \sum_{j=1}^n a_{ij} q_j \leq v_2 & i = 1, \ldots, m \\ & \sum_{j=1}^n y_j = 1 & \\ & y_j \geq 0 & j = 1, \ldots, n \end{array}$$

以下の定理が成り立つ．

**定理 1.24** (ミニマックス定理)**.** 問題 $(ZeroGame_D)$ の解を $v_1^*$,$x^*$，問題 $(ZeroGame_P)$ の解を $v_2^*$,$y^*$，とすると，

(1) $v_1^* = v_2^*$

(2) $\begin{array}{ll} p^*Aq^* \geq pAq^* & \forall p \in \Delta(S_1) \\ p^*Aq^* \leq p^*Aq & \forall q \in \Delta(S_2) \end{array}$

が成り立つ．

*Proof.* ここでプレイヤー 2 の問題である $(ZeroGame_P)$ を，標準形に変換する．目的関数は $-v_2$ とすることで最大化問題にできる．スラック変数 $s \in \mathbb{R}^m$ を導入し，$v_2 = v_2^+ - v_2^-$，$v_2^+ \geq 0$，$v_2^- \geq 0$ とする．$\tilde{q} = (q, v_2^+, v_2^-, s) \in \mathbb{R}^{n+m+2}$,

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|cc|ccc} & & & -1 & 1 & & & \\ & A & & \vdots & \vdots & & I_m & \\ & & & -1 & 1 & & & \\ \hline 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right)$$

$\tilde{b} = (0, \ldots, 0, 1) \in R^{m+1}$，$\tilde{c} = (0, \ldots, 0, -1, 1, 0, \ldots, 0 \in \mathbb{R}^{n+m+2})$ とすることで，$(ZeroGame_P)$ は

$$\begin{array}{ll} \max & \tilde{c}\tilde{q} \\ \text{s.t.} & \tilde{A}\tilde{q} = \tilde{b} \\ & \tilde{q} \geq 0 \end{array}$$

となり，標準形に変形できる．双対問題は $\tilde{p} = (p, \tilde{v}_1)$ とすると

$$\begin{array}{lll} \min & -\tilde{v_1} & \\ \text{s.t.} & pA + \tilde{v_1} \geq 0 & \\ & \sum i = 1^m p_i = 1 & \\ & p_i \geq 0 & i = 1 \ldots, m \end{array}$$

となるが，$v_1 = -\tilde{v_1}$ とすることで $(ZeroGame_D)$ となることが分かる．したがって $(ZeroGame_P)$ の双対問題が $(ZeroGame_D)$ になっていることが分かる．双対定理より $v_1^* = v_2^*$ である．

相補スラック定理より，$(ZeroGame_P)$ の最適値を $v_2^*$ とすると，

$$q_j^*(\textstyle\sum_{i=1}^n a_{ij}p_i^* - v_2^*) = 0 \quad j = 1, \ldots, n$$

が成立する．これより $\sum_{j=1}^n q_j^*(\sum_{i=1}^m a_{ij}p_i^* - v_2^*) = 0$ であるから，$\sum_{j=1}^n q_j^* \sum_{i=1}^m a_{ij}p_i^* = v_2^*$ が成り立つ．すなわち $x^*Ay^* = v_2^*$ である．

$\sum_{j=1}^n a_{ij}q_j^* \leq v_2^*$ であることに注意すると，任意の $p \in \Delta(S_1)$ に対して，

$$pAq^* = \sum_{i=1}^m p_i(\sum_{j=1}^n a_{ij}q_j^*) \leq \sum_{i=1}^m p_i v_2^* = v_2^* = x^*Ay^*$$

である．同様に $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}p_j^* \geq v_1^*$ であることに注意すると，任意の $q \in \Delta(S_2)$ に対して，

$$p^*Aq = \sum_{j=1}^{n} q_j(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}p_j^*) \geq \sum_{j=1}^{n} q_i v_1^* = v_1^* = v_2^* = x^*Ay^*$$

である． □

ミニマックス定理は，$(x^*, y^*)$ がゲームの均衡（ナッシュ均衡）になっていることを表している．

## 1.9 演習 2

**演習 1.6.** 双対問題 $(D)$ を主問題と考えたとき，その双対問題は主問題 $(P)$ と $(\tilde{P})$ になることを示せ．(双対問題 $(D)$ を標準形へ変換し，定義に従って，それを双対問題に変換することで示せ)

**演習 1.7.** 命題 *1.19* を証明せよ．

**演習 1.8.** 定理 *1.23* を，*Farkas* の補題から直接証明せよ．

## 1.10 追加事項：演習 1.4 の解答

演習 1.4 は，岸本さんに解いてもらったので，解答を以下に記しておきます.

*Proof.* $Ax = x$，$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ を満たす $x \geq 0$ が存在することを示す．これは $e = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$ として，

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A - I \\ e \end{pmatrix}, \quad \tilde{b} = (0, 1) \in R^{n+1}$$

として，$\tilde{A}x = \tilde{b}$，$x \geq 0$ となる $x \in \mathbb{R}^n$ が存在することを示せば良い.

もしこのような $x \in \mathbb{R}^n$ が存在しないと仮定する．すると Farkas の補題より，$y\tilde{A} \geq 0$ かつ $yb < 0$ であるような $y \in R^{n+1}$ が存在する．$yb = y_{n+1}$ なので $y_{n+1} < 0$ である．ここで $y_k = \max\{y_1, \ldots, y_n\}$ とする．$y\tilde{A} \geq 0$ の $k$ 列目は

$$\sum_{j=1}^{n} y_j a_{kj} - y_k + y_{n+1} \geq 0$$

と書ける．しかしここで任意の $j$ に関して $y_k \geq y_j$ であり，さらに $\sum_{j=1}^{n} a_{kj} = 1$ であることから，

$$\sum_{j=1}^{n} y_j a_{kj} - y_k + y_{n+1} \leq \sum_{j=1}^{n} y_k a_{kj} - y_k + y_{n+1} = y_k \sum_{j=1}^{n} a_{kj} - y_k + y_{n+1} = y_{n+1}$$

となるので，$y_{n+1} \geq 0$ となり矛盾する． □

## 1.11 Farkas の補題の証明 (2)

Farkas の補題の証明については，分離超平面定理を使った証明を既に示している．しかし，そこには分離超平面を具体的に求めたり，Farkas 補題の空でない方の集合のベクトルを具体的に求めたりする方法が示されたりはしていない.

Farkas 補題の空でない方の集合のベクトルを具体的に計算することは，はコアの配分や，リスク中立確率の計算や，ゼロ和ゲームの均衡を求めたりする方法につながると考えられ，重要であると考えられる.

ここまで見たように，これらの計算はすべて線形計画法と一体であり，線形計画法を計算することで，上記の解は求められることになる．したがって線形計画法の計算方法を詳しく学べば，上記の問題は解決するだろう.

しかしながら，線形計画法の理論は，このような観点から記述されていないので，Farkas の補題とそこをつなげるには少し距離がある.

そこで以下では，Farkas の補題の線形代数的な，もしくは構成的な証明を紹介しながら，その距離を埋めることを考えてみる.

**基底**　$v^1, \ldots, v^r$ を $r$ 本の 1 次独立な $n$ 次元ベクトルとする（$r \leq n$）. $V$ を $v^1, \ldots, v^r$ の張る空間とする，すなわち

$$V = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \exists (x_1, \ldots, x_n)\ v = \sum_{j=1}^{r} x_j v^j\}$$

とするとき，$v^1, \ldots, v^r$ を $V$ の**基底 (base)** と呼ぶ．$r$ を $V$ の**次元 (dimension)** と呼び，$\dim V$ で表す.

$A$ を $m \times n$ 行列とし，$A = (a^1, \ldots, a^n)$ とする（$a^j$ は $A$ の $j$ 番目の縦ベクトル）．span(A) の基底は，$a^1, \ldots, a^n$ の中で最大数の 1 次独立なベクトルの集合であり，その数が span(A) の次元である．span(A) の次元を $A$ の**階数 (rank)** と呼び，rank(A) で表す.

以下で示すグラムーシュミットの正規直交化法は，線形代数のテキストに必ず現れる定理で，具体的な計算を行う場合には役に立つ.

**定理 1.25** (グラムーシュミットの正規直交化法)**.** $w^1, \ldots, w^r$ を $V$ の基底とする．このとき，

$$\begin{array}{ll}
\bar{v}_1 = w^1 & v^1 = \frac{\bar{v}^1}{\|\bar{v}^1\|} \\
\bar{v}_2 = w^2 - (w^2 v^1) v^1 & v^2 = \frac{\bar{v}^2}{\|\bar{v}^2\|} \\
\bar{v}_3 = w^3 - (w^3 v^1) v^1 - (w^3 v^2) v^2 & v^3 = \frac{\bar{v}^3}{\|\bar{v}^3\|} \\
\vdots & \vdots \\
\bar{v}_r = w^r - (\sum_{i=1}^{r-1} (w^j v^i) v^i) & v^r = \frac{\bar{v}^r}{\|\bar{v}^r\|}
\end{array}$$

として，$v^1, \ldots, v^r$ を定めれば，任意の $i, j \leq r$ に対して，$i \neq j$ ならば $v^i v^j = 0$ であり，$i = j$ ならば $v^i v^j = \|v^i\| = 1$ である．（**ここで** $(w^2 v^1)$ **がベクトル** $w^2$ **と** $v^1$ **の内積を表し**，$(w^2 v^1) v^1$ **はベクトル** $v^1$ **の** $(w^2 v^1)$ **倍であることに注意**）

このような $v^1, \ldots, v^r$ を正規直交基底と呼ぶ.

次の定理は Gauss により証明されたとされ (Vohra (2004))，Farkas の補題はこの定理の不等式版と考えられる.

**定理 1.26.** $A$ を $m \times n$ 行列とし，$b \in \mathbb{R}^m$,

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}, \quad Y = \{y \in \mathbb{R}^m \mid yA = 0,\ yb < 0\}$$

とする．$X \neq \emptyset$ か $Y \neq \emptyset$ のどちらか一方が成立し，かつ両方が成立することはない.

証明は Vohra (2004)，松井，並木 (2000) などを参照せよ．ここでは松井，並木 (2000) を参考にして，グラムーシュミットの正規直交化法を用いる方法について記す.

*Proof.* まず $X \neq \emptyset$ と $Y \neq \emptyset$ が同時に成立しないことを示す．両方が成立するならば，$x \in X$，$y \in Y$ が存在するが,

$$yb = y(Ax) = (yA)x = 0x = 0$$

であるから，これは $yb < 0$ に矛盾する．したがって $X \neq \emptyset$ と $Y \neq \emptyset$ は同時に成立しない.

ここで，$A$ の列ベクトルで span(A) を張るベクトルを $a^1 \ldots, a^r$ とする．グラムーシュミットの正規直交化法によって，span(A) の正規直交化基底 $v^1, \ldots, v^r$ を得ることができる．さらに $\bar{b}$ を $v^1, \ldots, v^r$ の張る空間への直交射影とし，$y = \bar{b} - b$ とする．具体的には

$$\bar{b} = \textstyle\sum_{i=1}^{r} (bv^i)v^i \quad y = \bar{b} - b$$

とすればよい．任意の $j = 1, \ldots, r$ において，

$$yv^j = \sum_{i=1}^{r} (bv^i)v^i v^j - bv^j = bv^j - bv^j = 0$$

である．$v^1, \ldots, v^r$ は span(A) の正規直交化基底であることから，任意の $j = 1 \ldots, n$ に対して $a^j$ は $v^1, \ldots, v^r$ で張ることができる．具体的にはある $\bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ が存在して $a^j = \sum_{i=1}^{r} \bar{x}_i v^i$ とできる．

$$ya^j = y\left(\sum_{i=1}^{r} \bar{x}_i v^i\right) = \sum_{i=1}^{r} \bar{x}_i (yv^i) = 0$$

であり，すなわち $yA = 0$ を満たすことが分かる．

ここで

$$yb = y\left(\sum_{i=1}^{r} (bv^i)v^i - y\right) = \sum_{i=1}^{r} (bv^i)yv^i - \|y\| = -\|y\| \leq 0$$

である．

したがって $-\|y\| < 0$ ならば $yb < 0$ であるから $Y \neq \emptyset$ であり，$-\|y\| = 0$ ならば $y = 0$ であるから，$b = \sum_{i=1}^{r} (bv^i)v^i$ となり，$X \neq \emptyset$ である． □

このことから Farkas の補題の

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}, \quad Y = \{y \in \mathbb{R}^m | yA \geq 0, yb < 0\}$$

において，$b \notin$ span(A) の場合は $Y \neq \emptyset$ であることが分かる．

**Farkas 補題の証明**　Farkas の補題の構成的証明はいくつか存在する．

一般には，Farkas の定理は線形計画法の理論と一体である．本講義では Farkas の定理から強双対定理を証明したが，強双対定理から逆に Farkas の定理を証明することもできる．線形計画法のテキストなどでは，線形計画法のアルゴリズムである単体法の性質から，強双対定理を導き，そこから Farkas の定理を証明する．

このとき，単体法の性質から強双対定理を導くために重要な事は，単体法が有限のステップで終了することを保証することである．このための方法は **Bland のルール**と呼ばれる．したがって，Farkas の定理の構成的な証明は Bland ルールと密接に結びついていると言える．当初の講義の目的は，この Bland ルールについて紹介するとともに，これを用いた Farkas の定理の証明を示すことにあった．

その証明の 1 つは Vohra (2004) の定理 2.4 に与えられている．当初は，これを紹介する予定であったが，証明の一部に不明な部分があり，今回はこれを使うことをとりやめた（皆さんで考えて欲し

い，アルゴリズムの Step4 で選ばれる $a^w$ は，この選び方では $\{D\backslash a^h\} \cup a^w$ によって $b$ を張ることができるかどうかが不明）．

また Avis and Kaluzny (2004) も Bland ルールを用いた証明をしているが，これは定理 1.16 で示した不等式系の Farkas の定理である．元の等式系の Farkas の定理（定理 1.27）から不等式系を証明するのは容易であるが，逆は自明ではない．

そこで，今回は Bland ルールによる証明をやめて，松井，並木 (2000) による帰納的な証明を紹介する．この定理は (1)Farkas の定理のさらに一般的な命題を証明している，(2) 証明は解を求める手続きを与えている，(3) 初等的な証明で他の知識を必要としないという特徴を持っている．

以下，集合 $S, I, J, K$ が $S = I \cup J \cup K$ を満たし，$S = I \cap J = J \cap K = K \cap I$ を満たすならば $I, J, K$ は $S$ の分割であると言う．

**Farkas 補題の一般形とその証明**

**定理 1.27** (Farkas 補題の一般形 (松井，並木, 2000))**.** 任意の $m \times n$ 行列 $A$ と任意の $b \in \mathbb{R}^n$ に対して以下が成立する．

行列 $A$ の添字集合を $N = \{1, \ldots, n\}$ とし，$a^i$ を $A$ の第 $i$ ベクトルとする（$A = (a^1, \ldots, a^n)$）．$N$ の分割 $I, J, K$ に対して，$X(I, J, K)$，$Y(I, J, K)$ を

$$X(I,J,K) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{ll} Ax = b, & \\ x_i \geq 0 & (i \in I), \\ x_i\text{は自由} & (i \in J), \\ x_i = 0 & (i \in K), \end{array} \right\}, \quad Y(I,J,K) = \left\{ y \in \mathbb{R}^m \;\middle|\; \begin{array}{ll} ya^i \geq 0, & (i \in I), \\ ya^i = 0 & (i \in J), \\ ya^i\text{は自由} & (i \in K), \\ yb < 0 & \end{array} \right\},$$

と定義する．

このとき $N$ の任意の分割 $I, J, K$ に対して，$X(I, J, K) \neq \emptyset$ か $Y(I, J, K) \neq \emptyset$ のどちらか一方が成立し，かつ両方が成立することはない．

以下，集合 $S$ の任意の要素を $\ell$ とするとき，$S\backslash\{\ell\}$ を $S - \ell$ と書くことにする．

*Proof.* 両方が非空になることはないことを示す．$x \in X(I, J, K)$ と，$y \in Y(I, J, K)$ に対して，

$$\begin{aligned} yb = y(Ax) &= \sum_{i \in N} x_i(ya^i) \\ &= \sum_{i \in I} x_i(ya^i) + \sum_{i \in J} x_i(ya^i) + \sum_{i \in K} x_i(ya^i) \\ &= \sum_{i \in I} x_i(ya^i) + 0 + 0 \geq 0 \end{aligned}$$

となり $yb < 0$ とはならず矛盾する．したがって $X(I, J, K)$ と $Y(I, J, K)$ が両方非空になることはない．

以下，$X(I, J, K)$ と $Y(I, J, K)$ のどちらかが非空になることを $I$ の要素数に関する帰納法で示す．

$|I| = 0$ の場合．$j \in J$ である縦ベクトル $a^j$ を並べた行列を $\tilde{A}$ とする．すなわち $\tilde{A} = (a^j)_{j \in J}$ とし，$|J| = r$ とする．このとき命題は

$$\begin{aligned} X &= \{x \in R^r | \tilde{A}x = b\} \\ Y &= \{y \in \mathbb{R}^m | y\tilde{A} = 0, yb < 0\} \end{aligned}$$

のどちらか一方が非空であることを示すことになる．これは定理 1.26 により成立する．

$|I| < k$ で成立するとして仮定して，$|I| = k$ のとき成立することを示す．$I$ の中の要素を 1 つ選び $\ell$ とする．以下の 6 つの集合，

$$\begin{array}{lll} X(I,J,K), & X(I-\ell,J+\ell,K) & X(I-\ell,j,K+\ell) \\ Y(I,J,K), & Y(I-\ell,J+\ell,K) & Y(I-\ell,j,K+\ell) \end{array}$$

について考える．

$X(I-\ell,J,K+\ell)$ は $X(I,J,K)$ の定義の $x_\ell \geq 0$ を $x_\ell = 0$ に変えたものであるから，もし $X(I-\ell,J,K+\ell) \neq \emptyset$ ならば $X(I,J,K) \neq \emptyset$ が成立する．したがって，$X(I-\ell,J,K+\ell) = \emptyset$ の場合を考える．帰納法の仮定より，$X(I-\ell,J,K+\ell) = \emptyset$ ならば，$Y(I-\ell,J,K+\ell) \neq \emptyset$ である．

また同様に，$Y(I-\ell,J+\ell,K)$ は $Y(I,J,K)$ の定義の $ya^\ell \geq 0$ を $ya^\ell = 0$ に変えたものであるから，もし $Y(I-\ell,J+\ell,K) \neq \emptyset$ ならば $Y(I,J,K) \neq \emptyset$ が成立する．したがって，$Y(I-\ell,J+\ell,K) = \emptyset$ の場合を考える．帰納法の仮定より $Y(I-\ell,J+\ell,K) = \emptyset$ ならば，$X(I-\ell,J+\ell,K) \neq \emptyset$ である．

したがって，ある $x \in X(I-\ell,J+\ell,K)$ とある $y \in Y(I-\ell,J,K+\ell)$ を満たすような $x$ と $y$ の両方が存在する場合のみ議論すれば良い．このとき，

$$\begin{aligned} yb = y(Ax) &= \sum_{i\in N} x_i(ya^i) \\ &= \sum_{i\in I-\ell} x_i(ya^i) + x_\ell(ya^\ell) + \sum_{i\in J\cup K} x_i(ya^i) \\ &= \sum_{i\in I-\ell} x_i(ya^i) + x_\ell ya^\ell \geq x_\ell(ya^\ell) \end{aligned}$$

であり，$yb < 0$ より $x_\ell ya^\ell = x_\ell(ya^\ell) < 0$ となる．したがって $x_\ell > 0$ または $ya^\ell > 0$ が成立する．

$x_\ell > 0$ であれば，$x$ は $X(I,J,K)$ の要素であり，$ya^\ell > 0$ であれば，$y$ は $Y(I,J,K)$ の要素である．よって証明できた． □

## 1.12 演習 3

**演習 1.9.** $n$ 人のプレイヤーと $m$ 個の財に関する市場を考える．$N = \{1, \ldots, n\}$ に対して，各プレイヤー $j \in N$ が初期保有財 $w_j = (w_{j1}, \ldots, w_{jm})$ を保有しており，プレイヤー $j \in N$ が財の配分 $z_j = (z_{j1}, \ldots, z_{jm})$ を得た時のプレイヤー $j$ の効用関数は $u_j(z_j)$ で表されるとし，$u_j$ は凹関数であるとする．

提携 $S \subseteq N$ が組まれたとき，各提携は，提携内の財の交換により提携の効用の和を最大化すると考え, これをその提携の特性関数値と考える．すなわち線形計画問題

$$(P_S) \quad \begin{array}{ll} \max & \sum_{j \in S} u_j(z_j) \\ s.t. & \sum_{j \in S} z_j = \sum_{j \in S} w_j \end{array}$$

の最適値を $v(S)$ と考える．

このように $\{N, (w_1, \ldots, w_n), (u_1, \ldots, u_n)\}$ が与えられたとき，問題 $(P_S)$ の最適値を $v(S)$ と考えることで生成される協力ゲーム $(N, v)$ を市場ゲームと呼ぶ．

市場ゲームのコアが非空であることを定理 *1.23* を用いて証明せよ．

**演習 1.10.** 以下の $\mathbb{R}^3$ のベクトル $a^1, a^2, a^3$ について，グラム・シュミットの正規直交化を行って，正規直交基底を導出せよ．

**問 1** $a^1 = (1, 0, 0)$，$a^2 = (1, -1, 0)$，$a^3 = (-1, -1, -1)$

**問 2** $a^1 = (1, 1, 0)$，$a^2 = (0, -2, 0)$，$a^3 = (-1, -1, 2)$

**演習 1.11.** 定理 *1.27* を用いれば，*Farkas* 補題の $X$ と $Y$ のどちらかに属するような $x$ か $y$ を再帰的に求めることができるはずである．$3 \times 4$ 行列の $A$ と $b \in \mathbb{R}^4$ を 1 つ選び，このような例を作成せよ．

## 2 Sperner の補題とその応用

### 2.1 数学的準備

**アフィン独立** 集合 $\{x^1, \ldots, x^r\} \subset \mathbb{R}^n$ $(r \geq 1)$ が**アフィン独立 (affinely independent)** であるとは，任意の $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \mathbb{R}$ に対して $\sum_{i=1}^r \lambda_i x^i = 0$ かつ $\sum_{i=1}^r \lambda_i = 0$ が成り立つならば $\lambda_1 = \ldots, = \lambda_r = 0$ が成り立つことを言う．

$\{x^1, \ldots, x^r\} \subset \mathbb{R}^n$ がアフィン独立ならば $r \leq n+1$ であり，$r \geq 2$ のとき $r-1$ 本のベクトル $\{x^2 - x^1, x^3 - x^1, \ldots, x^n - x^1\}$ は一次独立である．

**単体** アフィン独立の凸結合の集合を**単体 (simplex)** と呼ぶ．特に $r$ 本のアフィン独立の凸結合の集合を $r-1$ **次元単体** ($r-1$ **dimensional simplex**) または単に $r-1$ **単体** ($r-1$**-simplex**) と呼ぶ．$r$ 本のアフィン独立な点 $\{x^1, \ldots, x^r\} \subset \mathbb{R}^n$ で表される $r-1$ 次元単体を $\sigma(x^1, \ldots, x^r)$ で表す．すなわち

$$\sigma(x^1, \ldots, x^r) = \left\{ \sum_{i=1}^r \lambda_i x^i \mid \lambda \geq 0, i = 1, \ldots, n, \ \sum_{i=1}^r \lambda_i = 1 \right\}$$

とする．

$r-1$ 次元単体 $\sigma(x^1, \ldots, x^r)$ に対して，各点 $x^i (i = 1, \ldots, r)$ は $r-1$ 次元単体 $\sigma(x^1, \ldots, x^r)$ の**頂点 (vertex)** と呼ばれる．部分集合 $\{x_1^i, \ldots, x_k^i\} \subset \{x^1, \ldots, x^r\}$ （$k \leq r$）で構成される $k-1$ 次元単体 $\sigma(x^1, \ldots, x^k)$ は，の $k-1$ **次元面 (r-1 dimensional face)**，もしくは単に**面 (face)** であるとよぶ．定義より，頂点と $r-1$ 次元単体 $\sigma(x^1, \ldots, x^r)$ 自身は，$\sigma(x^1, \ldots, x^r)$ の面である．

**単体分割** $n-1$ 次元単体 $\sigma(x^1, \ldots, x^n)$ に対して，$n-1$ 次元単体の有限集合 $\mathcal{T}$ が以下を満たすとき，$\mathcal{T}$ は $\sigma(x^1, \ldots, x^n)$ の単体分割であると呼ぶ．

**(1)** $\bigcup_{i \in \mathcal{T}} \sigma_i = \sigma(x^1, \ldots, x^n)$ （$\mathcal{T}$ の中のすべての単体の集合は $\sigma(x^1, \ldots, x^n)$）．

**(2)** 任意の $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{T}$ に対して，$\sigma_1 \cap \sigma_2$ は空集合か，2 つの単体に共通する面かのどちらかである．

**例 2.1.** 図 *1* において，*(a)* の $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ は単体 $\sigma(x_1, x_2, x_3)$ の単体分割ではない．なぜなら $\sigma_1 \cap \sigma_3$ は両単体の共通な面になっていないからである．*(b)* の $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\}$ は単体 $\sigma(x_1, x_2, x_3)$ の単体分割になっている．

### 2.2 Sperner の補題とその証明

$\sigma(x^1, \ldots, x^n)$ を $n-1$ 次元単体とする．任意の点 $y \in \sigma(x^1, \ldots, x^n)$ に対して，ある $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ $(\lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1)$ が存在して $y = \sum_{i=1}^n \lambda_i x^i$ と書ける．このとき $\{1, \ldots, n\}$ の部分集合 $\chi(y)$ を

$$\chi(y) = \{i | \lambda_i > 0\}$$

と定義する．もし $\chi(y) = \{i_1, \ldots, i_r\}$ であれば $y \in \sigma(i_1, \ldots, i_r)$ であることが分かる．

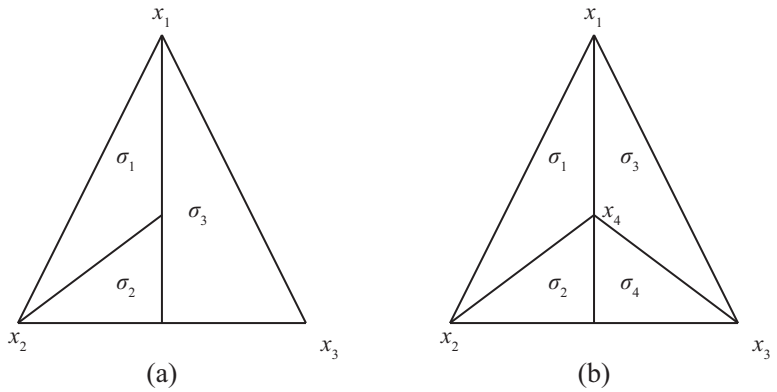


図 1: 単体と単体分割の例

$\sigma(x^1, \ldots, x^n)$ を $n-1$ 次元単体とし，$\mathcal{T}$ をその単体分割とする．$V$ を $\mathcal{T}$ に含まれるすべての単体のすべての頂点の集合とする．$L : V \to \{1, \ldots, n\}$ となる関数は，この単体分割のラベル関数と呼ばれる．

ラベル関数が $L(y) \in \chi(y)$ を満たすとき，このラベル関数は Sperner 条件を満たすと言う．また単体分割に含まれる単体 $\sigma \in T$ のすべての頂点のラベルの集合が $1, \ldots, n$ に一致するとき，単体 $\sigma$ は完全ラベルであるという．

Sperner の補題は以下のような命題である．

**定理 2.2** (Sperner 補題)**.** $\sigma(x^1, \ldots, x^n)$ を $n-1$ 次元単体とし，$\mathcal{T}$ をその単体分割とする．$V$ を $\mathcal{T}$ に含まれるすべての単体のすべての頂点の集合とし，$L : V \to \{1, \ldots, n\}$ を以下の条件を満たす関数とする．このとき，完全ラベルの単体が $\mathcal{T}$ に奇数個存在する．

0 は偶数と考えるので，完全ラベルの単体は少なくとも 1 つ存在する．

*Proof.* $n$ に関する帰納法で証明する．$n = 1$ の場合，0 次元単体は 1 点 $x^1$ からなり，Sperner 条件は $x^1$ に 1 をつけることであり，これは完全ラベルの単体であるので，$n = 1$ の場合は成立する．

そこで $n-1$ のときに命題が成立すると仮定し，$(n \geq 2)$．$n$ のときに成立することを示す．ここで，次の集合を考える．

- $\mathcal{T}$ に含まれる $n-1$ 次元単体で，完全ラベルの単体の集合を $C$ とする．($C$ は completey labeled の $C$)
- $\mathcal{T}$ に含まれる $n-1$ 次元単体で，$\{0, \ldots, n-1\}$ のラベルがついているが，完全ラベルではない単体の集合を $A$ とする．$A$ に含まれる単体を概完全ラベルの単体と呼ぶ．($A$ は Almost completely labeled の $A$)
- $\mathcal{T}$ に含まれる $n-1$ 次元単体の $n-2$ 次元面であり，$\{1, \ldots, n-1\}$ のラベルが付いている $n-2$ 次元単体の集合を $E$ とする．

- $\mathcal{T}$ に含まれる $n-1$ 次元単体の $n-2$ 次元面であり，$\{1,\ldots,n-1\}$ のラベルが付いていて，$\sigma(x^1,\ldots,x^n)$ の $n-1$ 次元面に含まれるような $n-2$ 次元単体の集合を $B$ とする．($B$ は boudary の $B$)

ここで以下のことに注意せよ．

- $B$ は，$E$ の中で $\sigma(x^1,\ldots,x^n)$ の境界面に含まれるものの集合である（すなわち $B \subseteq E$）．
- $B$ に含まれる要素が $\sigma(x^1,\ldots,x^n)$ の境界面に含まれるということは，スペルナー条件からその境界面は $\sigma(x^1,\ldots,x^{n-1})$ であることが分かる．

ここで $D = C \cup A \cup B$ として，$D$ を点の集合とし，$E$ を枝の集合とするグラフを以下のように作る．

任意の $e \in E$ は，$\sigma(x^1,\ldots,x^n)$ の境界面に含まれるか，2 つの $\mathcal{T}$ に含まれる $n-1$ 次元単体の共通面となっているかのどちらかである．

- $e \in E$ が $\sigma(x^1,\ldots,x^n)$ の境界面に含まれる場合．この場合は $e \in B$ でもある．また $e$ は，$\mathcal{T}$ に含まれるある $n-1$ 次元単体 $d$ の面をなしており，その単体 $d$ は完全ラベル（$e \in E$ の頂点とは異なる唯一の頂点のラベルが $n$）か，概完全ラベル（$e \in E$ の頂点とは異なる唯一の頂点のラベルが $\{1,\ldots,n-1\}$ のいずれか）か，のどちらかである．そこでこの場合は，点 $d \in A \cup C$ と点 $e \in B$ を枝 $e \in E$ で結ぶ．
- $e \in E$ が $\sigma(x^1,\ldots,x^n)$ の境界面に含まれない場合．この場合は $e$ は $\mathcal{T}$ に含まれる 2 つの $n-1$ 次元単体 $d$ の共通面をなしている．この $n-1$ 次元単体単体は完全ラベル（$e \in E$ の頂点とは異なる唯一の頂点のラベルが $n$）か，概完全ラベル（$e \in E$ の頂点とは異なる唯一の頂点のラベルが $\{1,\ldots,n-1\}$ のいずれか）か，のどちらかである．そこでこの場合は，この 2 つの単体を枝 $e \in E$ で結ぶ．

上記の議論から，$D = C \cup A \cup B$ を点の集合とし，$E$ を枝の集合とするグラフができることが分かる．

詳しく見ると，任意の $d \in D$ に対して

- $d \in C$ の場合，完全ラベルの $n-1$ 次元単体 $d$ は，唯一の $\{1,\ldots,n-1\}$ のラベルが付いている $n-2$ 次元単体 $e \in E$ を持つので，$e$ を介してのみ繋がるグラフの点（次数が 1 の端点）となっている．
- $d \in A$ の場合，概完全ラベルの $n-1$ 次元単体 $d$ は，2 つの $\{1,\ldots,n-1\}$ のラベルが付いている $n-2$ 次元単体 $e, e' \in E$ を持つので，$e$ と $e'$ にのみ繋がるグラフの点（次数が 2 の点）となっている．
- $d \in B$ の場合，$\{1,\ldots,n-1\}$ のラベルが付いている $n-2$ 次元単体 $d$ は，$d \in E$ となる枝を介してのみ繋がるグラフの点（次数が 1 の端点）となっている，なお枝を介して繋がる点は，$d$ を面とする $n-1$ 次元単体 $d \in A \cup C$ である．

したがってこのグラフは $B \cup C$ が端点となるような経路の集合となることが分かる．

グラフの基本的な性質から，グラフの各点の次数の和は，枝の数の 2 倍に等しい．したがって

$$2|E| = |C| + 2|A| + |B|$$

が成り立つ．帰納法の仮定より $|B|$ は奇数であるから，$|C|$ は奇数である．よって定理は証明された． □

図 2 は，$n = 3$ における Sperner 補題のラベリングの例と，上記の証明におけるグラフとの対応を表したものである．

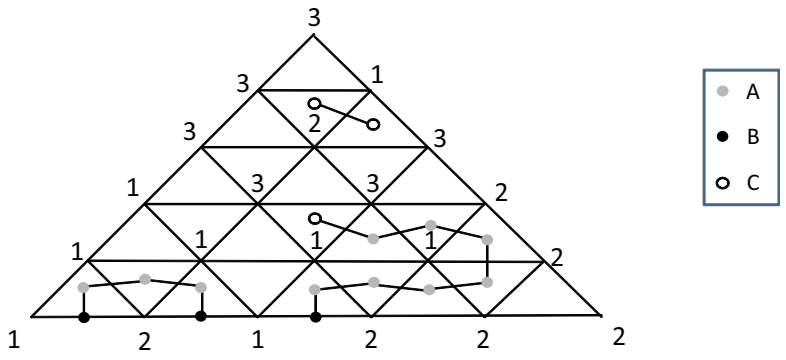


図 2: Sperner 補題のラベリングの例

### 2.3 Brouwer の不動点定理

Sperner の補題を使い，単体上における Brouwer の不動点定理と，それと同値である KKM 定理（Kanster-Kuroatowski-Mazurkiewicz の定理）について紹介し，その証明を示す．Brouwer の不動点定理は，一般均衡や Nash 均衡の存在などの均衡点の存在証明や，非羨望配分の存在証明などに使われる重要な定理であるが，証明したい内容によっては KKM 定理のほうが便利な場合もある．

Sperner の補題から Brouwer の不動点定理を示すには，不動点定理の連続な関数を単体分割上では線形となる区分線形関数で近似することによって得られると考えて良い．単体の分割を極限まで細かくすることで，近似的された区分線形関数が元の関数に収束することから定理が得られる．このため，単体分割の細かさを定義しなければならない．

**単体の直径**　$\sigma(x^1, \ldots, x^n)$ を $n-1$ 次元単体とし，$\mathcal{T}$ をその単体分割とする．単体 $\sigma \in \mathcal{T}$ に対して，その直径 $\mathrm{diam}(\sigma)$ を

$$\mathrm{diam}(\sigma) = \max\{\|x - y\| | x, y \in \sigma\}$$

と定義する．単体分割 $\mathcal{T}$ のメッシュを

$$\mathrm{mesh}(\mathcal{T}) = \max\{\mathrm{diam}(\sigma) \,|\, \sigma \in \mathcal{T}\}$$

とする．

**定理 2.3.** $\Sigma$ を $n-1$ 次元単体とし，$f:\Sigma\to\Sigma$ の連続関数とする．このとき $f$ は $f(x^*)=x^*$ となるような不動点 $x^*\in\Sigma$ を持つ．

*Proof.* $n-1$ 次元単体 $\Sigma$ の $n$ 個の頂点を $x^1,\ldots,x^n$ とする．すなわち $\Sigma=\sigma(x^1,\ldots,x^n)$ とする．単体の定義から任意の $y\in\Sigma$ に対し，$\lambda_j(y)\geq 0$，$\sum_{j=1}^n\lambda_j(y)=1$ を満たすある $\lambda(y)=(\lambda_1(y),\ldots,\lambda_n(y))$ が存在して，$y=\sum_{j=1}^n\lambda_j(y)x^j$ と書ける．

ここで任意の $y\in\Sigma$ に対し，$i\in\chi(y)$ かつ $\lambda_i(f(y))\leq\lambda_i(y)$ であるような，ある $i\in\{1,\ldots,n\}$ が存在する．もし，そうでないと仮定すると $i\in\chi(y)$ となるすべての $i$ に対して $\lambda_i(f(y))>\lambda_i(y)$ である．ここで

$$\sum_{j=1}^n\lambda_j(y)=\sum_{j\in\chi(y)}\lambda_j(y)<\sum_{j\in\chi(y)}\lambda_j(f(y))\leq\sum_{j=1}^n\lambda_j(f(y))=1$$

であるが，$\sum_{j=1}^n\lambda_j(y)=1$ よりこれは矛盾である．したがって，任意の $y\in\Sigma$ に対し，$i\in\chi(y)$ かつ $\lambda_i(f(y))\leq\lambda_i(y)$ であるような，ある $i\in\{1,\ldots,n\}$ が存在する．

ここで $\{\mathcal{T}^k\}$ を，$\mathrm{mesh}(\mathcal{T}^{\mathrm{k}+1})<\mathrm{mesh}(\mathcal{T}^{\mathrm{k}})$ で，$k\to\infty$ のとき $\mathrm{mesh}(\mathcal{T}^{\mathrm{k}})\to 0$ となるような単体分割の列とする．$V^k$ を $\mathcal{T}^k$ に含まれるすべての単体のすべての頂点の集合とする．

上記の議論から，任意の $v\in V^k$ に対し，$i\in\chi(v)$ かつ $\lambda_i(f(v))\leq\lambda_i(v)$ であるようなある $i\in\{1,\ldots,n\}$ が存在する．そこでこのような $i$ に対して $L^k(v)=i$ となるラベル関数 $L^k:V\to\{1,\ldots,n\}$ を定義する．

このラベル関数は Sperner 条件をみたすので，Sperner の補題から完全ラベルの単体が存在する．この単体の頂点の中で，ラベル $i$ が付いている頂点を $v^i(k)$ で表すことにする．この完全ラベルの単体は $\sigma(v^1(k),\ldots,v^n(k))$ と表せる．

ここで $k\to\infty$ とすると，$\Sigma$ はコンパクトであることから，任意の $i\in\{1,\ldots,n\}$ に対して，ある部分列 $\{v^i(k)\}$ が存在して，$v^i(k)$ はある点に収束する．しかも $\mathrm{mesh}(\mathcal{T}^{\mathrm{k}})\to 0$ であることから，これらはどの $i\in\{1,\ldots,n\}$ に対しても同じ点 $x^*\in\Sigma$ に収束する．すなわち $v^i(k)\to x^*$ である．

任意の $k$，$i$ に対して $\lambda_i(f(v^i(k)))\leq\lambda_i(v^i(k))$ が成り立つことから $\lambda_i(f(x^*))\leq\lambda_i(x^*)$ である．

ここで，もしある $i$ に対して $\lambda_i(f(x^*))<\lambda_i(x^*)$ であれば，

$$\sum_{j=1}^n\lambda_j(f(x^*))<\sum_{j=1}^n\lambda_j(x^*)=1$$

となるが，左辺は $\sum_{j=1}^n\lambda_j(f(x^*))=1$ となるので矛盾する．

したがって任意の $i$ に対して $\lambda_i(f(x^*))=\lambda_i(x^*)$ である．これより $f(x^*)=x^*$ である． □

## 2.4 角谷の不動点定理

Brouwer の不動点定理が，$R^n$ の点から点を選ぶ写像に対する不動点定理であるのに対して，角谷の不動点定理は点から集合を選ぶ関数 (point to set mapping) に対する不動点定理である．点から集合を選ぶ関数は対応と呼ばれ，ナッシュ均衡の存在定理や一般均衡の存在定理に用いられる．角谷の不動点定理は，ゲーム理論や数理経済学の中心的な役割を果たす定理であると言えるだろう．

**対応**　$R^n$ の部分集合 $C$ の点に，$R^n$ の部分集合 $D$ の中の集合を対応させる写像 $\phi$ を $C$ から $D$ への**対応 (corrspondence)** と呼び $\phi : C \rightrightarrows D$ と書く．$\phi : C \rightrightarrows D$ であるとき，任意の $x \in C$ に対して $\phi(x) \subseteq D$ である．

**上半連続**　対応 $\phi : C \rightrightarrows D$ が $x \in C$ で上半連続であるとは，$\phi(x) \subseteq V$ であるような任意の開集合 $V$ に対して，$x \in U$ となるある開集合 (近傍) が存在して，$y \in U$ であれば，$\phi(x) \subseteq U$．対応 $\phi : C \rightrightarrows D$ が $C$ 上のすべての $x$ に対して上半連続のとき，$\phi$ は上半連続であるという．

**閉対応**　対応 $\phi : C \rightrightarrows D$ が $x \in C$ で閉じている（closed）とは，$x^n \to x$ となる点列に対して，$y^n \in \phi(x^n)$，$y^n \to y$ ならば，$y \in \phi(x)$ であることを言う．対応 $\phi : C \rightrightarrows D$ が $C$ 上のすべての $x$ に対して閉じているとき，$\phi$ は閉じているという．

上半連続性と閉じていることとは互いに異なる性質である．例えば，$\phi : [0,1] \rightrightarrows \mathbb{R}$ において

$$\phi(x) = \begin{cases} \{1/x\} & 0 < x \leq 1 \\ \{0\} & x = 0 \end{cases}$$

とすると，$\phi$ は閉じているが上半連続ではない．また $\phi : [0,1] \rightrightarrows \mathbb{R}$ において $\phi(x) = (0,1)$ は，上半連続であるが閉じていない．

しかし上記の 2 つの条件は，かなり近い性質であり，以下のような条件で同一視できる．

**命題 2.4. (i)** 対応 $\phi : C \rightrightarrows D$ が上半連続で，その値が閉集合であるならば，$\phi$ は閉である．

**(ii)** $D$ がコンパクトで，対応 $\phi : C \rightrightarrows D$ が閉じているならば，$\phi$ は閉である．

$x \in \phi(x)$ であるとき，$x$ を対応 $\phi$ の不動点と呼ぶ．

**定理 2.5** (角谷の不動点定理)**.** $C$ を非空な $R^n$ の有界凸閉集合とし，対応 $\phi : C \rightrightarrows C$ は，非空で凸な値を持つ，閉じた対応であるとする．このとき $\phi$ は不動点を持つ．

角谷の不動点定理が成立するには「対応が（非空で）凸な値を持つ」「閉じている」という条件が必要である．このことを考えるために，$C = [0,1]$ として，次の 3 つの $C$ から $C$ への対応を考えてみよう．

$$\phi_1(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 0 & 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$$

$$\phi_2(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1/2 \\ \{0,1\} & x = 1/2 \\ 0 & 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$$

$$\phi_3(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1/2 \\ [0,1] & x = 1/2 \\ 0 & 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$$

$\phi_1$ は，凸な値を持つ対応であるが $x = 1/2$ で閉じていない．$\phi_2$ は，閉じているが，$x = 1/2$ で値が凸ではない．そして，この 2 つの対応は不動点を持たない．$\phi_3$ は凸な値を持ち，閉じていて不動点 $x = 1/2$ を持っている．

角谷の不動点定理は，Brouwer の不動点定理から簡単に導けそうに思える．思いつくことは,「対応」の値である集合から 1 つの値を選んで「関数」を作り，その関数の不動点が元の対応の不動点となっていることを示すという考え方である．この筋道は正しいのだが，上記の $\phi_3$ の $x = 1/2$ のところでは，このような関数が不連続になってしまうため，単純には上手く行かない．Brouwer の不動点定理から，角谷の不動点定理への道は，それほど単純ではなく少し壁がある．そして，それがこれは上記の角谷の不動点定理が成立するための条件に表れている．どのような壁となっているかは，証明の後に再度，考えてみよう．

以下の証明は Yang (1999) を参考にしている．定理 2.5 の証明には Brouwer の不動点定理（定理 2.3）を使う．定理 2.3 は，$n$ 次元単体からそれ自身への不動点定理であり，定理 2.5 は，$n$ 次元の有界凸閉集合 $C$ からそれ自身への不動点定理に拡張されている．定理 2.3 から定理 2.5 へ向かうには，その困難も克服しなければならない．Yang (1999) にある証明では有界凸閉集合 $C$ を大きな単体 $\Sigma$ に含み，その $\Sigma$ 上にうまい対応 $\psi$ を作ることでその困難を克服している．

証明のために以下の定義を行う．

**区分線形近似関数**　$\Sigma$ を $n$ 次元単体とし，$\psi{:}\Sigma \rightrightarrows \Sigma$ とする．$\{\mathcal{T}^k\}$ を $\Sigma$ の単体分割とする．線形関数 $f : \Sigma \to \Sigma$ を，以下のように作る．

単体分割 $\{\mathcal{T}^k\}$ に含まれる任意の単体 $\sigma \in \mathcal{T}$ に対して，その頂点を $v^i$ とする $(i = 1, \ldots, n+1)$．ここで頂点 $v^i$ に対しては，$f(v^i) \in \phi(v^i)$ となるように $f$ の値を定める．また単体 $\sigma \in \mathcal{T}$ 内の任意の点 $x \in \sigma$ に対しては，$x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i v^i$ となるような，ある $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1} \geq 0$，$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda^i = 1$ が存在する．それを用いて $f$ の値を

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(v^i)$$

と定義する．このとき $f$ を対応 $\phi$ の $\{\mathcal{T}^k\}$ における区分線形近似関数と呼ぶ.

*Proof.* $\Sigma$ を $C$ を含む $n$ 次元単体とする．$C$ の中の 1 つの内点を $v \in int(C)$ とし，以下のように対応 $\psi$ を定義する．

$$\psi(x) = \begin{cases} \phi(x) & x \in int(C) \\ \mathrm{conv}(\phi(\mathrm{x}) \cup \{\mathrm{v}\}) & x \in bd(C) \\ \{v\} & x \in \Sigma \setminus C \end{cases}$$

まず $\psi$ の不動点 $x^*$ は $\phi$ の不動点であることを示す．明らかに $x^* \in C$ である．もし $x^* \in int(C)$ ならば $\psi(x^*) = \phi(x^*)$ であるから，$x^*$ は $\phi$ の不動点である．そこで $x^* \in bd(C)$ であるとしよう．$x^* \in \mathrm{conv}(\phi(\mathrm{x}^*) \cup \{\mathrm{v}\})$ であるから，$0 \leq \lambda \leq 1$ である $\lambda$ と $y \in \phi(x^*)$ が存在して，$x^* = \lambda v + (1-\lambda) y$ と書ける．しかしここで $\lambda > 0$ であるとすると $x^* \in int(C)$ であるから，$x^* \in bd(C)$ に矛盾する．したがって $\lambda = 0$ であり，$x^* = y$ である．すなわち $x^* \in \phi(x^*)$ である．以上より，$\psi$ の不動点 $x^*$ は $\phi$ の不動点であることが言えた.

以下では$\psi$に不動点が存在することを示す．ここで$\{\mathcal{T}^k\}$を，$\mathrm{mesh}(\mathcal{T}^{\mathrm{k+1}}) < \mathrm{mesh}(\mathcal{T}^{\mathrm{k}})$で，$k \to \infty$のとき$\mathrm{mesh}(\mathcal{T}^{\mathrm{k}}) \to 0$となるような$\Sigma$の単体分割の列とする．関数$f^k : \Sigma \to \Sigma$を$\{\mathcal{T}^k\}$における区分線形関数とする．

$f^k$は線形関数で連続なので，定理2.3により不動点が存在する．この不動点を$x^k$としよう．

このとき，$x^k$を含むある$\sigma^k \in \mathcal{T}^k$が存在する．その頂点を$v^{i,k}$とする$(i = 1, \ldots, n+1)$と，$x^k = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i^k v^{i,k}$となるようなある$\lambda_1^k, \ldots, \lambda_{n+1}^k \geq 0$，$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i^k = 1$が存在する．区分線形近似関数の定義から，$f^k(x^k) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i^k f^{i,k}$，$f^{i,k} \in \phi(v^i)$，$(i = 1, \ldots, n+1)$となるような$f^{i,k} = f^k(v_i)$が存在する．$x^k$は不動点であるから，

$$x^k = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i^k f^{i,k} \tag{6}$$

である．

$\Sigma$はコンパクト（有界閉集合）なので，$k \to \infty$のとき，ある部分列が存在して$x^k \to x^*$，$\lambda_i^k \to \lambda_i$，$f^{i,k} \to f^i$となる．しかも$\mathrm{mesh}(\mathcal{T}^{\mathrm{k}}) \to 0$より，$v^{i,k} \to x^*$である．

$\phi$が閉じていることと，$v^{i,k} \to x^k$，$f^{i,k} \in \phi(v^i)$，$f^{i,k} \to f^i$より，$f^i \in \phi(x^*)$である．(6)より$x^* = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f^i$，$\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1} \geq 0$，$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$となる．$\phi(x^*)$は凸であるので$x^* \in \phi(x^*)$であり，$x^*$は$\phi$の不動点である． □

## 参考文献

松井知巳，並木誠 (2000), Farkas の補題と双対定理の初等的証明，**オペレーションズ・リサーチ**, Vol. 45.（証明には誤りがあり，訂正版が松井先生のページ `http://homepage2.nifty.com/TOMOMI/text/namiki10.pdf` にある）.

D. Avis, B. Kaluzny, Solving Inequalities and Proving Farkas' Lemma Made Easy, American Mathematics. Monthly 111 (2004), **2**, 152–157.

Cox, J. C., Ross, S. A. and Rubinstein, M. (1979), Option pricing: A simplified approach, *Journal of Financial Economics* **7**, 229–263.

Border, K. C. (1985), *Fixed Point Theorems with Applications to Economics and Game Theory*, Cambridge University Press.

Topkis, D. M., (1998), Supermodularity and Complementarity (Frontiers of Economic Research), 1998, Princeton Univ Pr.

Vohra, R. (2004), Advanced Mathematical Economics (Routledge Advanced Texts in Economics and Finance), 2004, Routledge.

Yang, Z., (1999), Computing Equilibria and Fixed Points (Theory and Decision Library C), Springer.