制度設計特論講義ノート（東工大大学院講義2014後期)

平成 26 年 10 月 17 日版

1　Farkas の補題とその応用

1.1　数学的準備

本講義では集合 S_1，S_2 において $S_1 \subset S_2$ と書くとき，S_1 は S_2 の真部分集合であることを表す. $S_1 = S_2$ を含む時は $S_1 \subseteq S_2$ で表す.

実数の集合の上限と下限　実数の部分集合 S において，S のすべての要素以上の数で最小の数を S の**上限 (supremum)** と呼び $\sup(S)$ で表す．S のすべての要素以下の数で最大の数を S の**下限 (infimum)** と呼び $\inf(S)$ で表す.

ベクトルの演算　実数空間を $\mathbb{R}$ と書き，n 次元（ユークリッド）空間を $\mathbb{R}^n$ で表す．n 次元ベクトル $x \in \mathbb{R}^n$ が与えられたとき，x_i は第 i 成分を表すものとする．n 次元ベクトル $x \in \mathbb{R}^n$ と実数 $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して，ベクトルの実数倍を $\lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$ とする.

本来は，n 次元ベクトル $x \in \mathbb{R}^n$ は縦ベクトルと横ベクトルを区別する必要がある．例えば $x, y \in \mathbb{R}^n$ としたとき，x が横ベクトル,$y \in \mathbb{R}^n$ が縦ベクトルであれば，xy はベクトルの内積を表し

$$xy = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

となるし，また x が縦ベクトル,$y \in \mathbb{R}^n$ が横ベクトルであれば，xy は $n \times n$ 行列

$$xy = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \ldots & x_1y_n \\ & \vdots & & \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \ldots & x_ny_n \end{pmatrix}$$

となる．しかし煩雑になるため本書では縦ベクトルと横ベクトルを区別せずに，ベクトルや行列の積を書いた時は，ベクトルや行列の前に書かれているものは横ベクトルで，後に書かれているものは縦ベクトルとみなす．すなわちベクトルの積 xy は，x と y の内積を表し, 行列 A に対して，yA の y は縦ベクトル，Ax の x は縦ベクトルとみなすものとする．$a^1, a^2, \ldots, a^n \mathbb{R}^m$ を m 次元ベクトルとし，$A = (a^1, a^2, \ldots, a^n)$ と書いた場合，a^i は縦ベクトルとみなし，A は $m \times n$ 行列であると考える.

ベクトルの一次結合　$a^1, a^2, \ldots, a^n \in \mathbb{R}^m$ とする．ある n 個の実数 $(x_1, \ldots, x_n)$ に対してベクトル $y \in \mathbb{R}^m$ が

$$y = \sum_{i=1}^{n} x_i a^i$$

と書けるとき，y は $a^1, a^2, \ldots, a^n$ の **1 次結合 (linear combination)** で表わされるという．

A を $m \times n$ 行列とし，$A = (a^1, a^2, \ldots, a^n)$ とする．このとき span(A) を $a^1, a^2, \ldots, a^n$ のの 1 次結合で表わされる空間，すなわち

$$\mathrm{span(A)} = \{y \in \mathbb{R}^m | \exists x \in \mathbb{R}^n, y = Ax\}$$

とする．また cone(A) を $a^1, a^2, \ldots, a^n$ の正の 1 次結合で表わされる空間，すなわち

$$\mathrm{cone(A)} = \{y \in \mathbb{R}^m | \exists x \geq 0, x \in \mathbb{R}^n, y = Ax\}$$

とする．

ベクトルの大小　$x, y \in \mathbb{R}^n$ の大小関係を，各成分を用いて，以下のように定義する．

$$\begin{array}{lcll}
x = y & \Leftrightarrow & x_i = y_i & \forall i \in \{1, \ldots, n\} \\
x \geq y & \Leftrightarrow & x_i \geq y_i & \forall i \in \{1, \ldots, n\} \\
x > y & \Leftrightarrow & x_i \geq y_i & \forall i \in \{1, \ldots, n\} \quad \text{かつ} \quad \text{少なくとも 1 つの } j \text{ に対して } x_j > y_j \\
x \gg y & \Leftrightarrow & x_i > y_i & \forall i \in \{1, \ldots, n\}
\end{array}$$

ベクトルの距離　2 つの n 次元ベクトル $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対して，その距離を $d(x, y)$ で表すことにし，

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

とする．$x \in \mathbb{R}^n$ において $d(0, x)$ を x の**ノルム (norm)** と呼び $\|x\|$ と書く．

閉集合と開集合　S を n 次元の部分集合とする．すべての k に対し $x^k \in S$ である点列 $\{x^k\}$ を $\{x^k\} \subseteq S$ と書くことにする．x に収束する任意の点列 $\{x^k\} \subseteq S$ に対して，$x \in S$ であるとき S は**閉集合 (closed set)** であると言う．また，どんな $x \in S$ に対しても，ある $\epsilon > 0$ が存在して，$d(x, y) < \epsilon$ となるすべての y が $y \in S$ となるならば，S は**開集合 (open set)** であると呼ぶ．

開集合と閉集合には以下の定理が成り立つ．証明はしない．他の本を参照せよ．

定理 1.1. 開集合の補集合は閉集合であり，閉集合の補集合は開集合となる．

区間　**区間 (interval)** を以下のように定義する:

$$
\begin{aligned}
&[a,b] = \{x \in R | a \le x \le b\},\\
&[a,b) = \{x \in R | a \le x < b\},\\
&(a,b] = \{x \in R | a < x \le b\},\\
&(a,b) = \{x \in R | a < x < b\},
\end{aligned}
$$

$[a,b]$ を**閉区間 (closed interval)**，(a,b) を**開区間 (open interval)**，$a < b$ のとき $[a,b]$ は閉集合，(a,b) は開集合である．

有界　集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ が**有界 (bounded)** であるとは，ある正の数 r が存在して，任意の $x \in S$ に対して $\|x\| \le r$ となるときを言う．S が有界で閉集合のとき，S は**コンパクト (compact)** であるという．

関数の連続性　関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を考える．f が点 $a \in \mathbb{R}^n$ で**連続 (continuous)** であるとは，任意の $\epsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して，$d(x,a) < \delta$ であるようなすべての $x \in \mathbb{R}^n$ に対して $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ となることである．

また f が集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ 上で連続であるとは，すべての点 $a \in S$ と任意の $\epsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して，$d(x,a) < \delta$ であるようなすべての $x \in S$ に対して $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ となることである．

上記の「ある点での連続」と「ある集合上での連続」の違いに注意せよ.「$d(x,a) < \delta$ であるようなすべての x」に対して，点での連続性は「すべての $x \in \mathbb{R}^n$」としており，集合での連続性は「すべての $x \in S$」としている．

問題 1.2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して，点 $x = 0$ では連続ではないが，集合 $[0,1]$ では連続であるような例を考えてみよ．

上記の集合での連続の定義は，点での連続の定義とずれが生じる．つまり $S = \{a\}$ とし，a で不連続な関数 f を考えると，f は点 a では不連続であるが集合 S では連続である．関数 f が $[a,b]$ において，点 a では不連続であるが $S = [a,b]$ で連続の場合，関数 f は S で最大値を持つ．上記の連続の定義は定義域で関数が最大値を持つための条件と似ているように感じられる．(2013 年：岸本くんの指摘)

関数の最大値と最小値　関数 f の集合 S における最大値を $\max_{x \in S} f(x)$，最小値を $\min_{x \in S} f(x)$ と書く．また S 上で f の最大値，最小値を与える点の集合をそれぞれ，$\mathrm{argmax}_{x \in S} f(x)$，$\mathrm{argmin}_{x \in S} f(x)$ と書く．

本講義では「均衡の存在」が大きな興味であり．均衡の存在のためには，少なくともある関数（利得関数，効用関数）の最大値が存在していなければならない．つまり本講義においては「最大値の存在」は重要な問題である．

以下の定理は，最大値の存在を保証する重要な定理である．証明は（それほど難しくはないが）ここでは行わない．他の本を参考にせよ．

定理 1.3 (Weierstrass の最大値定理)**.** $S \subseteq \mathbb{R}^n$ をコンパクト集合とし，f を S 上で連続な関数であるとする．このとき $\mathrm{argmax}_{x \in S} f(x)$，$\mathrm{argmin}_{x \in S} f(x)$ が存在し，両方とも S に含まれる．

問題 1.4. 次の条件で，$\mathrm{argmax}_{x \in S} f(x)$ が S 上に存在しない例を示せ．

(1) f は連続で，S は有界だが，閉集合ではない．

(2) f は連続で，S は閉集合だが，有界ではない．

(3) S はコンパクトだが，f は不連続．

1.2 分離超平面定理

定義 1.5 (凸集合)**.** 集合 $C \subseteq \mathbb{R}^n$ が，任意の $x, y \in C$ と任意の $\lambda \in [0, 1]$ に対して，$\lambda x + (1-\lambda) y \in C$ を満たすとき，C は**凸集合 (convex set)** であると言う．

凸集合は，閉集合の時も，開集合の時もある．

補助定理 1.6. C を 0 を含まない閉集合とする．このとき $d(x^0, 0) = \inf_{x \in C} d(x, 0) > 0$ となるある $x^0 \in C$ が存在する．

Proof. 任意の $y \in C$ を選び，$C' = C \cap \{x \in C | d(x, 0) \leq d(y, 0)\}$ とすれば，閉集合の共通部分は閉集合であり，C' は有界となるから，C' はコンパクトである．$d(x, 0)$ は x に関して連続な関数であり，C' はコンパクトであるから，$d(x^0, 0) = \min_{x \in C'} d(x, 0)$ となる点 x^0 が存在する．この点は x^0 は C に属し，明らかに $d(x, 0)$ を最小とする点でもある． □

定義 1.7 (超平面)**.** $h \in \mathbb{R}^n$ と $\beta \in R$ に対して，$H = \{x \in \mathbb{R}^n | hx = \beta\}$ を超平面 *(hyper plane)* と言い $H = (h, \beta)$ と書く．$\{x \in \mathbb{R}^n | hx \leq \beta\}$ を**半空間 (half set)** と言う．

定理 1.8 (分離超平面定理)**.** C を閉凸集合とし，$b \in \mathbb{R}^n$ が $b \notin C$ であるとする．このとき，任意の $x \in C$ に対して，$hb < \beta < hx$ であるような超平面 (h, β) が存在する．

Proof. $x' = x - b$ と座標を変換して考えれば良いので，以下 $b = 0$ であるとして証明する．補助定理 1.6 から $d(x^0, 0) = \min_{x \in C} d(x, 0)$ となるような $x^0 \in C$ が存在する．

$m = \frac{x^0}{2}$ としよう．0 と x^0 を結んだ線に直交して x^0 を通るような超平面を (h, β) とし，この超平面が C と 0 を分離することを示せば良い．具体的には $h = x^0 / d(x^0, 0)$，$\beta = hm$ とすれば良い．ここで $hm = d(x^0, 0)/2$ となることが分かる．

ここで

$$hb = h \cdot 0 = 0 < d(x^0, 0)/2 = \beta$$

であり，

$$hx^0 = x^0 \frac{x^0}{d(x^0, 0)} = d(x^0, 0) > d(x^0, 0)/2 = \beta$$

であるから，$hb < \beta < hx^0$ であることが分かる．

x^0 ではない任意の $x \in C$ を考える．$hx > \beta$ を示せば良い．C が凸集合であるから，任意の $\lambda \in [0,1]$ に関して $(1-\lambda)x^0 + \lambda x \in C$ である．x^0 の選び方から $d(x^0,0) \leq d((1-\lambda)x^0 + \lambda x, 0)$ である．したがって，両辺を二乗して $d(x^0,0)^2 \leq d((1-\lambda)x^0 + \lambda x, 0)^2$ である．

$$\begin{aligned} d((1-\lambda)x^0 + \lambda x, 0)^2 &= d(x^0 + \lambda(x - x^0), 0)^2 \\ &= d(x^0,0)^2 + 2\lambda x^0(x - x^0) + \lambda^2 d(x - x^0, 0) \end{aligned}$$

であることから

$$2\lambda x^0(x - x^0) + \lambda^2 d(x - x^0, 0) \geq 0$$

となる．λ はいくらでも小さく取れるので，

$$\lambda x^0(x - x^0) \geq 0$$

でなければならない．これより $x^0 x \geq d(x^0,0)^2$ となるので

$$hx = \frac{x^0 x}{d(x^0,0)} \geq d(x^0,0) > \frac{d(x^0,0)}{2} = \beta$$

より $hx > \beta$ が言えた． □

補助定理 1.9. A を $m \times n$ 行列とする．このとき cone(A) は凸集合となる．

Proof. 任意の $y, y' \in$ cone(A) を考える．ある $x, x' \geq 0$ が存在して，$y = Ax$,$y' = Ax'$ である．したがって，任意の $\lambda \in [0,1]$ に対して

$$\lambda y + (1-\lambda)y' = \lambda Ax + (1-\lambda)Ax' = A(\lambda x + (1-\lambda)x')$$

である．$\lambda x + (1-\lambda)x' \geq 0$ であるから，$A(\lambda x + (1-\lambda)x') \in$ cone(A) である． □

補助定理 1.10. A を $m \times n$ 行列とする．このとき cone(A) は閉集合となる．

cone が閉集合であることを示すのは，難しくはないが少々面倒である．ここでは証明は省略する．Vohra (2004) の補助定理 3.9 などを参照してほしい．

1.3 Farkas の補題とその証明

定理 1.11 (Farkas の補題)**.** 任意の $m \times n$ 行列 A と任意の $b \in \mathbb{R}^m$ に対して，

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}, \quad Y = \{y \in \mathbb{R}^m | yA \geq 0, yb < 0\}$$

とする．$X \neq \emptyset$ か $Y \neq \emptyset$ のどちらか一方が成立し，かつ両方が成立することはない．

Proof. まず両方が成立することはないことを示す．$Ax = b$ かつ $x \geq 0$ であるような $x \in \mathbb{R}^n$ と，$yA \geq 0$ であるような $y \in \mathbb{R}^m$ が存在するならば，

$$yb = y(Ax) = (yA)x \geq 0$$

となり $yA < 0$ とはならない．したがって，$X \neq \emptyset$ ならば $Y = \emptyset$ であり，両方は成立しない．

次に $X = \emptyset$ ならば $Y \neq \emptyset$ を示す．$X = \emptyset$ ならば，$b \notin \mathrm{cone(A)}$ である．cone(A) は閉凸集合であるから (補助定理 1.9，1.10)，定理 1.8 より b と cone(A) を分離するある超平面 (h, β) が存在し，任意の $z \in \mathrm{cone(A)}$ に対して，$hb < \beta < hz$ とできる．$0 \in \mathrm{cone(A)}$ より $\beta < 0$ である．

a^j を A の j 番目の縦ベクトル（列ベクトル）とする．このとき $ha^j \geq 0$ である．これを示すために $ha^j < 0$ と仮定する．このとき任意の $\lambda \geq 0$ に関して $\lambda a^j \in \mathrm{cone(A)}$ であることから，$h(\lambda a^j) > \beta$ である．一方，$ha^j < 0$ であるから λ を十分に大きくすると $h(\lambda a^j)$ は β より小さくなる．これは矛盾である．

したがって任意の j に関して $ha^j \geq 0$ となるので $hA \geq 0$ である．h を y と考えることができ $Y \neq \emptyset$ であると言える． □

1.4 Farkas 補題の応用 (1):裁定，リスク中立確率，オプション価格

1.4.1 裁定とリスク中立確率

ファイナンス理論において最初に学ぶのは，以下のような現在と将来の 2 時点（1 期間）での証券市場のモデルである．

いま，m 個の証券があるとする．これらが将来において取る状態は不確実であり，n 個の状態を取るとする．現在の証券 i の価格を p_i とし，証券 i の状態 j での証券価格を a_{ij} で表す（証券の配当はないものとする）．$A = (a_{ij})$ とすると，A は $m \times n$ 行列となる．

m 個の証券の組合せをポートフォリオと呼び，$y \in \mathbb{R}^m$ で表す．ポートフォリオは，証券の正の保有比率を考える場合と（$y \geq 0, \sum_{i=1}^m y_i = 1$），保有単位数を考えて符号制約をしない場合とがある．ここでは後者を考える．$y_i > 0$ の場合は，証券 i を**現物所有 (long position)** していることを表し，$y_i < 0$ の場合は，証券 i を**空売り (short position)** している場合を表す．

現在の証券価格を $p = (p_1, \ldots, p_m)$ で表すとしよう．このとき（弱い意味での）無裁定条件を以下のように定義する．

定義 1.12. 現在の証券価格 $p \in \mathbb{R}^m$ と 1 期間後の証券価格 A に対して，無裁定の条件が成り立つとは，任意のポートフォリオ $y \in \mathbb{R}^m$ に対して $yA \geq 0$ ならば，$yp \geq 0$ が成り立つことを言う．

反対にあるポートフォリオ $y \in \mathbb{R}^m$ が存在して，$yA \geq 0$ かつ $yp < 0$ となるとき，裁定が存在すると言う．

裁定が存在するとは「自己資金がなくても，いくらでも巨額の富を得ることができる」ことを指す．**タダ飯 (free lunch)** とか，**マネーポンプ (money pomp)** とか，さまざまな呼び方をされる．

例 1.13. 今，1 期間後の状態数が 2 つの場合を考える．1 つの証券を考え，現在の証券価格 100 円で，1 期間後に状態 1 では 150 円，状態 2 では 200 円になるとしよう．

このような状態は「裁定が起きている」と間違いを犯しやすい．この証券を 100 円で買えば，少なくとも 1 期間後には 150 円以上になっているので，この証券を大量に買えば大量に儲かるからである．しかし裁定は，このように「無リスクで *1* 期間後にお金を増やすことができる」ことではないことに注意が必要である．そもそも無危険資産が存在すれば，それに大量に投資すれば無リスクで *1* 期間後にお金を大量に増やすことはできる．しかしそれは裁定ではない．

上記の状態を．定義に従って裁定が起きていると言わないことを確認しよう．$p = 100$，$A = (150, 200)$ とし，ポートフォリオ *(*この場合 $y \in \mathbb{R}$*)* に対して $yA \geq 0$ となれば $y \geq 0$ であるから，必ず $yp = 100 \geq 0$ となり $yp < 0$ とはならない．裁定の概念の説明において,「自己資金がなくても」と言う部分があったが，証券が 1 つしかない場合には自己資金なしに証券を買うことができず，空売りすることしかできないからである．

このような市場に，以下のように「債権」もしくは「無危険資産」と呼ばれる証券を 1 つ加えれば，裁定となる．今，100 円を 1 期間預ければ，105 円となるような債権（利子率 5%）を考える．このような債権は，現在の価格が 100 円で，将来の価格が状態 1,2 で共に 105 円となる証券であると考えることができる．2 証券の 1 期間後の証券価格を

$$A = \begin{pmatrix} 150 & 200 \\ 105 & 105 \end{pmatrix}$$

で表し，証券価格を $p = (100, 100)$ とすれば，このような状況を表現することができる．このときたとえば $y = (1, -1.2)$ とすれば (証券を 1 単位買うために，自己資金を作るために少し多め 1.2 単位のお金を借り，1 期間後に返す)，$yA = (24, 74) \geq 0$（1 単位の証券を買った儲けから利子分 26 円を返還），$yp = -20 < 0$ となり裁定が生じる．

無裁定であるということは，言い換えると $yA \geq 0$ で，かつ $yp < 0$ となるようなポートフォリオ $y \in \mathbb{R}^m$ が存在しないということである．したがって Farkas 補題より以下のことが成り立つ．

命題 1.14. 証券価格 $p \in \mathbb{R}^m$ と 1 期間後の証券価格 A に対して，無裁定の条件が成り立つならば，$x \geq 0$ であるような $x \in \mathbb{R}^n$ が存在して $Ax = p$ とできる．

もし $p > 0$ であれば，$\sum_{j=1}^n x_j \neq \quad 0$ である．この場合は $\sum_{j=1}^n x_j$ によって，証券価格と x を正規化できて $p^* = p/\sum_{j=1}^n x_j$，$x^* = x/\sum_{j=1}^n x_j$ とできる．この x^* は $\sum_j^n x_j^* = 1$，$x_j \geq 0$ を満たすのであたかも確率であるかのように見える．実際に

$$p_j^* = \sum_{j=1}^n x_j^* a_{ij}$$

であるから，x^* を確率としてみなすと（正規化された）証券 i の現在の価格は任意の証券 i の 1 期間後の期待値として表すことができる．

x^* を確率としてみなすとリスク中立的な人の期待効用が証券 i の現在の価格となることから，x^* を**リスク中立確率 (risk neutral probability)** 呼ぶ．無裁定条件はリスク中立確率の必要十分条件であることが Farkas の補題より分かる．

1.4.2 オプションの価格付けと Black–Scholes の式

オプションと呼ばれる金融商品の理論価格は Black–Scholes の式と呼ばれ，Black，Scholes，Merton によって考えだされた．このオプションの価格理論は，先の節で説明したリスク中立確率の応用として考えることができる．

オプションとは最初に定められた価格で，証券を買ったり，売ったりする権利である．証券を買う権利を**コールオプション (call option)**，証券を売る権利を**プット・オプション (put option)** という．また，ある期間までの定められた期間のいつでも権利を行使できるものは**アメリカン・オプション (American option)**，定められた期間が過ぎたその時点でのみ権利を行使できるものは**ユーロピアン・オプション (Europian option)** という．ここでは，**ユーロピアン・コール・オプション (European call option)** というオプションについて説明しよう．

ある証券のユーロピアン・コール・オプションは**行使価格 (strike price)** K というものが決められていて，定められた期間が過ぎた時点において，オプション権利を行使すれば K を支払うことででその証券が購入できる（行使しなければ，何も支払わず何も購入しない）.「このオプションを売買するとしたならば，価格はいくらになるか」というのがオプションの価格理論である．

2 時点 1 期間モデルで，この問題を定式化してみよう．1 期間の状態は 2 つとし，第 1 状態を good，第 2 状態を bad とする．現在の証券価格を S^0 とし，第 1 状態では証券の価格は uS^0 になり，第 2 状態では dS^0 になるとして，$u > 1 > d$ とする．また無危険資産が存在するとし，その利子率を r

とし，$R = 1 + r$ としよう．無危険資産を金額 B だけ借りると，1 期間後には RB で返済しなければならない．

ここでこの証券のユーロピアン・コール・オプションを考え，行使価格を K とする．このオプションは 1 期間後の証券価格が K よりも高ければ行使され，そうでなければ行使されないと考えられるので，オプションの 1 期間後の価格は，第 1 状態では $\max\{0, uS^0 - K\}$, 第 2 状態では $\max\{0, dS^0 - K\}$ であると考えられるだろう．したがって，証券，無危険資産，オプションからなる証券価格の行列 A は

$$A = \begin{pmatrix} uS^0 & dS^0 \\ \max\{0, uS^0 - K\} & \max\{0, dS^0 - K\} \end{pmatrix}$$

となる．

もし市場が無裁定であれば，あるリスク中立確率 $\pi = (\pi_1, \pi_2)$ が存在して

$$\begin{pmatrix} S^0 \\ B \\ p^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} uS^0 & dS^0 \\ RB & RB \\ \max\{0, uS^0 - K\} & \max\{0, dS^0 - K\} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix}$$

が成り立つ．

最初の 2 つの方程式は

$$uS^0\pi_1 + dS^0\pi_2 = S^0$$
$$RB\pi_1 + RB\pi_2 = B$$

となるので，これを解いて

$$\pi_1 = \tfrac{R-d}{R(u-d)} \quad \pi_2 = \tfrac{u-R}{R(u-d)}$$

となる．

非負のリスク中立確率 $\pi = (\pi_1, \pi_2)$ が存在する必要十分条件は $u \geq R \geq d$ である．もしこれが成り立たず $R \leq d$ であれば，無危険資産に価値はなく，証券をどんどん買えば良い（無危険資産を売って，証券をたくさん買えば裁定取引ができる）．また $u \leq R$ の場合は，逆に証券に価値はなく，無危険資産をどんどん買えば良い（証券をたくさん空売りして，無危険資産を買えば裁定取引ができる）．

非負のリスク中立確率 $\pi = (\pi_1, \pi_2)$ が存在する時は，

$$p^* = \pi_1 \max\{0, uS^0 - K\} + \pi_2 \max\{0, dS^0 - K\} \tag{1}$$

となる．オプション価格は式 (1) で決定される．

この式は確率微分方程式を用いて導出される Black–Scholes の式の原理を，1 期間 2 状態として分かりやすく表現したもので，Cox, Ross and Rubinstein (1979) によって導かれたものして知られている．

1.5 演習 1

演習 1.1. 次の集合が凸集合であることを証明せよ.

(1) $[a, b]$

(2) (a, b)

(3) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$

(4) $\{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$

(5) $C_1, \ldots, C_m$ を凸集合の族としたときの共通部分 $\cap_{i=1}^m C_i$

演習 1.2. 以下の 2 つの場合について，span(A) と cone(A) を 2 次元平面に図示せよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

演習 1.3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ とする．$b = (2, 2)$ とするとき，*Farkas* の補題を用いて $yA \geq 0$, $yb < 0$ となる解が存在しないことを示せ.

演習 1.4. $n \times n$ 行列 A が，すべての i, j に対して $a_{ij} \geq 0$ を満たし，$\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1$ をすべての $j = 1, \ldots, n$ に対して満たすとき A をマルコフ行列と呼ぶ．a_{ij} は状態 j から状態 i への推移確率を表している．このとき $Ax = x$，$\sum_{i=1}^n x_i = 1$ を満たす x を定常確率ベクトルと呼ぶ．*Farkas* の補題を用いて，すべてのマルコフ行列が定常確率ベクトルを持つことを証明せよ.

演習 1.5. 現時点（時点 0）における証券価格を 100，行使価格を 80，1 期間の利子率を 10% としたとき,（ヨーロピアン・タイプの）コールオプションの価格を求めよ.

演習 1.6. *2* 時点 *2* 証券の *2* 状態モデルで，以下のように 1 単位あたりの証券価格が与えられたとする.

	時点 0	時点 1		
		状態 1	状態 2	
証券 *1*	1	R	R	（無危険資産）
証券 *2*	S	uS	dS	

裁定機会がある条件と，ない条件を u, d, R の式で示せ．また裁定がある場合に，時点 0 でどのようなポートフォリオを組めば裁定の利益が得られるか.