基礎物理学演習VI(奥川)No.2

2014.10.23,30

【1】《極座標における面積分と体積積分》

(i) $r \sim r + \mathrm{d}r$，$\theta \sim \theta + \mathrm{d}\theta$，$\phi \sim \phi + \mathrm{d}\phi$ の部分の微小体積要素が

$$\mathrm{d}V = r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi \tag{1}$$

であることを説明せよ．

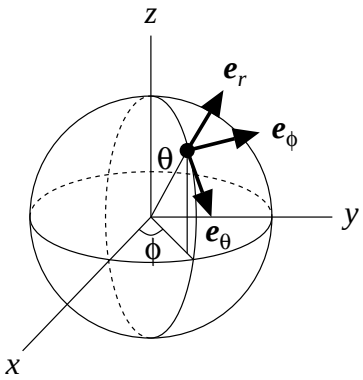
(ii)

$$\mathrm{d}V = r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi \tag{2}$$

を用いて，半径 R の球の体積 $(4/3)\pi R^3$ を導け．

(iii) 球の表面における微小面積要素ベクトル $d\boldsymbol{S}$ を求めよ．また、半径 R の球の表面積 $4\pi R^2$ を導け．

(iv) 球の半径 $r \sim r + \mathrm{d}r$ の部分の微小体積 $\mathrm{d}V_r$ を求めよ．



【2】《ガウスの発散定理》

ガウスの発散定理が実際に成立することを確かめる．

$$\int_V (\nabla \cdot \boldsymbol{v}) dV = \oint_S \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{S} \tag{1}$$

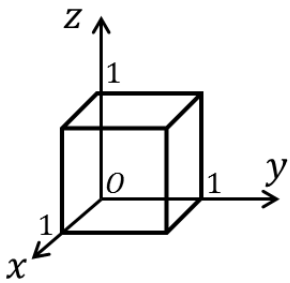
この右辺の面積分は領域 V を囲む閉曲面 S について行われる．

例として、ベクトル $\boldsymbol{v} = (2xy + z^2)\boldsymbol{e}_y + (2yz)\boldsymbol{e}_z$ を考える．

(i)$\nabla \cdot \boldsymbol{v}$ を計算せよ．

(ii) 図のような各辺の長さが 1 の立方体領域 V を考える．$\nabla \cdot \boldsymbol{v}$ を V について体積積分せよ．

(iii) 立方体 V の表面を S とする．ベクトル $\boldsymbol{v}$ の S 上での面積分を直接求めることでガウスの発散定理が成立することを確認せよ．



【3】《ストークスの定理》

ストークスの定理を実際に成立することを確かめてみる．

$$\int_S (\nabla \times \boldsymbol{v}) \cdot d\boldsymbol{S} = \oint \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} \tag{1}$$

S は右辺の線積分をする外周によって囲まれる表面にとる．

例として、ベクトル $\boldsymbol{v} = (6xz + 9y^2)\boldsymbol{e}_y + (12yz^2)\boldsymbol{e}_z$ を考える．

(i)$\nabla \times \boldsymbol{v}$ を計算せよ．

(ii) 各辺の長さが 1 の正方形 S を考える．

この正方形 S の頂点は $O(0,0,0), A(0,1,0), B(0,1,1), C(0,0,1)$ にあるとする．ベクトル $\boldsymbol{v}$ を S の辺 $O \to A \to B \to C \to O$ に沿って線積分せよ．

(iii)$\nabla \times \boldsymbol{v}$ を S 上で面積分することでストークスの定理が成立することを確認せよ．

【4】《ベクトル解析》
f をスカラー、$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ をベクトルとする．ストークスの定理またはガウスの発散定理を用いることで次の式を証明せよ．

$$\int_S f(\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot d\boldsymbol{S} = \int_S [\boldsymbol{A} \times (\nabla f)] \cdot d\boldsymbol{S} + \oint f\boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r} \tag{1}$$

$$\int_V \boldsymbol{B} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) dV = \int_V \boldsymbol{A} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B}) dV + \oint_S (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot d\boldsymbol{S} \tag{2}$$