線型代数学第二A　中間試験　　解答と解説

1.　$\mathbb{R}^4$ のベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5$ を左から順にみて, 1 次独立なベクトルの組を選び出し, 残りのベクトルをその 1 次結合で表せ.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{a}_5 = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

解答例　$A = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5]$ とおく. A を行基本変形により階段行列に変形しよう. 第 1 行の $-1, -3$ 倍をそれぞれ第 2, 第 3 行に加えると

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -4 & -4 \\ 3 & 0 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & -6 & 7 & 10 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

となる. 第 2 行の $-1, 3, 1$ 倍をそれぞれ第 1, 第 3, 第 4 行に加え, 新しい第 3 行の $2, 3$ 倍をそれぞれ新しい第 2, 第 4 行に加えると

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となる. 得られた階段行列を $B = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5]$ とおく. B は A を行基本変形した行列であるから, $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ に対し,

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 + x_4\mathbf{a}_4 + x_5\mathbf{a}_5 = \mathbf{o} \iff x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + x_3\mathbf{b}_3 + x_4\mathbf{b}_4 + x_5\mathbf{b}_5 = \mathbf{o}$$

が成り立つ $(*)$. B の形より明らかに $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_4\}$ は 1 次独立であり,

$$\mathbf{b}_3 = -\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2, \quad \mathbf{b}_5 = 2\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_4$$

が成り立つ. 従って, $(*)$ より

$\boldsymbol{\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4\}}$ **は 1 次独立**であり,

$$\boldsymbol{\mathbf{a}_3 = -\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2, \quad \mathbf{a}_5 = 2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_4} \quad \cdots\cdots \quad (\text{答え})$$

である. □

解説・講評　問題 1 は 1 次独立なベクトルの組を選び出す問題です. 正しく理由を述べて 4 点, 正しい答えを書いて 3 点とし, 7 点満点で採点しました. 上の解答例では, A

の階段行列 B を正しく求めて 4 点, $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4\}$ が 1 次独立であることを述べて 1 点, $\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_5$ を $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4$ の 1 次結合として表して各 1 点としました. 途中で計算を間違えた人にも可能な限り部分点をつけました. とてもよくできていました. 行基本変形に関しては, 多くの人が計算の過程を詳しく説明していて, よい答案が多かったように思います. 左側のベクトルから順に 1 次独立性を調べている答案も多く見受けられました. この方法は手間はかかりますが, 似た計算を繰り返すので, 誤りが起きにくいと思います.

2. $\mathbb{R}^4$ の 2 つの部分空間 W_1, W_2 に対し, $W_1 \cap W_2$ の基底と次元を求めよ.

$$W_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \right\rangle, \quad W_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle$$

解答例　まず,

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_6 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

とする. $\mathbb{R}^4$ のベクトル $\mathbf{v}$ が $W_1 \cap W_2$ に含まれるための必要十分条件は,

$$\mathbf{v} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 = x_4\mathbf{a}_4 + x_5\mathbf{a}_5 + x_6\mathbf{a}_6$$

をみたす $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in \mathbb{R}$ の存在することである. ここで,

$$A = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, -\mathbf{a}_4, -\mathbf{a}_5, -\mathbf{a}_6], \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}$$

とおくと, この条件は同次形の連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$ が解をもつ条件に他ならない. 行基本変形により A の階段行列を求めよう. 第 1 行と第 2 行を入れ替えると

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 & -1 & -3 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 & -1 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

となる．第 1 行の $1, -1$ 倍をそれぞれ第 $3, 4$ 行に加え，新しい第 3 行の $-1, -2$ 倍をそれぞれ新しい第 $1, 2$ 行に加えると

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & 10 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

となる．第 2 行を $-1/5$ 倍して第 2 行と第 3 行を入れ替え，新しい第 3 行の $-3, -1$ 倍をそれぞれ新しい第 $2, 4$ 行に加えると

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

となる．第 4 行を $1/2$ 倍し，新しい第 4 行の $-1, 1$ 倍をそれぞれ新しい第 $1, 3$ 行に加えると

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = B$$

となる．この階段行列を B とする．このとき，$A\mathbf{x} = \mathbf{o} \Leftrightarrow B\mathbf{x} = \mathbf{o}$ であるから，$B\mathbf{x} = \mathbf{o}$ を解いて，$x_1 = -c_1 - c_2$, $x_2 = -c_1 - c_2$, $x_3 = c_1 + c_2$, $x_4 = -c_1 + c_2$, $x_5 = c_1$, $x_6 = c_2$ (c_1, c_2 は任意の実数) となる．従って，

$$\mathbf{v} = (-c_1 - c_2)\mathbf{a}_1 + (-c_1 - c_2)\mathbf{a}_2 + (c_1 + c_2)\mathbf{a}_3 = (c_1 + c_2) \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

と表される．よって，$W_1 \cap W_2$ のひとつの基底は

$$\left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{bmatrix} \right\} \quad \cdots\cdots \quad (\text{答え})$$

であり，$W_1 \cap W_2$ の次元は

$$\dim(W_1 \cap W_2) = \mathbf{1} \quad \cdots\cdots \quad (\text{答え})$$

である．□

解説・講評　問題 2 は 2 つの部分空間の共通部分の基底と次元を求める問題です．行列の計算に 3 点, 基底の求め方に 1 点, 正しい答えを書いて 2 点とし, 6 点満点で採点しました．上の解答例では, A の階段行列 B を正しく求めて 3 点, $W_1 \cap W_2$ と A とを関係づける部分に 1 点, 正しく基底と次元を答えて各 1 点としました．解法を思いついたか否かが正解と不正解を分けたようです．講義で配布した資料「部分空間の基底に関する問題」や, 川内先生のレポート問題 L8 の解答などを勉強していた人は, すんなりと解けたかもしれません．$W_1, W_2, W_1 + W_2$ の基底は見つけやすいのですが, $W_1 \cap W_2$ の基底を見つけるには少し工夫が要ります．次元定理を用いて $W_1 \cap W_2$ の次元のみを正しく答えた人も多かったようです．

3.　$\mathbb{R}^3$ の基底 $\mathcal{B}$ に関する線形変換 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ の表現行列が A であるとする．このとき, $\mathbb{R}^3$ の標準基底に関する f の表現行列を求めよ．

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

解答例　$\mathbb{R}^3$ の標準基底を $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ とし,

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

とする．$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ を $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ の 1 次結合として表すと

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= 0 \cdot \mathbf{e}_1 + 1 \cdot \mathbf{e}_2 + 1 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{b}_2 &= 1 \cdot \mathbf{e}_1 + 0 \cdot \mathbf{e}_2 + 1 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{b}_3 &= 1 \cdot \mathbf{e}_1 + 1 \cdot \mathbf{e}_2 + 0 \cdot \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

となる．よって, $\mathcal{E}$ から $\mathcal{B}$ への基底の取り替え行列は

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

である．また, $\mathcal{B}$ から $\mathcal{E}$ への基底の取り替え行列は B^{-1} である (教科書, 104 ページ). $\mathcal{E}$ に関する f の表現行列を F とすると, $F = (B^{-1})^{-1} A B^{-1} = B A B^{-1}$ が成り立つ (教科書, 系 4.14). B の逆行列 B^{-1} を求めよう．3×6 行列 $[\, B \,|\, I \,]$ に行基本変形を行う．まず, 第 1 行と第 3 行を交換して

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

となる. 第 1 行の -1 倍を第 2 行に加え, 新しい第 2 行を新しい第 1 行と第 3 行に加えると

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

となる. 第 2 行を -1 倍, 第 3 行を $1/2$ 倍し, 新しい第 3 行の $-1, 1$ 倍を第 1 行と新しい第 2 行に加えると

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right]$$

となる. よって,

$$B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

である. これを用いて F を求めると

$$F = BAB^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{2} \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots \quad (\text{答え})$$

となる. □

解説・講評　問題 3 は線形変換の表現行列と基底の取り替えに関する問題です. 正しい方針を示して 2 点, 表現行列を正しく計算して 3 点とし, 5 点満点で採点しました. 上の解答例では, $F = BAB^{-1}$ を述べて 2 点, B, B^{-1} を求めて各 1 点, BAB^{-1} の積の計算に 1 点という具合です. 正しい答案と誤った答案にかなりはっきりと分かれました. 誤った解答の中で最も多かったのは, 表現行列の定義を理解していないものです. 例えば, $f(\mathbf{b}_i) = A\mathbf{b}_i\,(i = 1, 2, 3)$ という式を書いた答案が目立ちました. これは正しい式ではありません. この問題は, $\mathcal{E}$ から $\mathcal{B}$ への基底の取り替えではなく, $\mathcal{B}$ から $\mathcal{E}$ への基底の取り替えを考察する問題です. この点に惑わされた答案も多かったようです. 例えば, $F = B^{-1}AB$ と書いた答案もかなり目につきました. 一方で, 表現行列の定義をきちんと理解していた人の中には, $F = BAB^{-1}$ という公式を知らなくとも正しい解答に辿り着いた人が多く見受けられました.

4.　次の線形写像の像と核の基底と次元を求めよ.

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \quad f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x + 4y + 3z + w \\ z + w \\ x + 2y + z \end{bmatrix}$$

解答例　3×4 行列 A と 4 次列ベクトル $\mathbf{x}$ を

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix},\quad \mathbf{x}=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

とする. 線形変換 f の核は

$$\operatorname{Ker} f=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^4 \mid f(\mathbf{x})=\mathbf{0}\}=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^4 \mid A\mathbf{x}=\mathbf{0}\}$$

であり, 同次形の連立 1 次方程式 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ の解空間である. 行基本変形により A の階段行列を求めよう. 第 1 行と第 3 行を入れ替え, 新しい第 1 行の -2 倍を新しい第 3 行に加えると

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

となる. 第 2 行の -1 倍をそれぞれ第 1, 3 行に加えると

$$\to\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=B$$

となる. この階段行列を B とする. このとき, $A\mathbf{x}=\mathbf{o}\Leftrightarrow B\mathbf{x}=\mathbf{o}$ であるから, $B\mathbf{x}=\mathbf{o}$ を解いて

$$\mathbf{x}=c_1\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\quad (c_1, c_2 \text{ は任意の実数})$$

となる. よって, f の核 $\operatorname{Ker} f$ のひとつの基は

$$\left\{\begin{bmatrix} \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},\begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}\right\}\quad\cdots\cdots\quad (\text{答え})$$

である.

次に, 行列 A, B を列ベクトルに分割して $A=[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_4]$, $B=[\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3,\mathbf{b}_4]$ とする. 線形変換 f の像は

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} f&=\{f(\mathbf{x})\mid \mathbf{x}\in\mathbb{R}^4\}=\{A\mathbf{x}\mid \mathbf{x}\in\mathbb{R}^4\}\\ &=\{x_1\mathbf{a}_1+x_2\mathbf{a}_2+x_3\mathbf{a}_3+x_4\mathbf{a}_4\mid x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{R}\}\\ &=\langle\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_4\rangle\end{aligned}$$

であり, A の列ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ が生成する $\mathbb{R}^4$ の部分空間である. A と B は行基本変形でうつりあうから, $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ に対し,

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 + x_4\mathbf{a}_4 = \mathbf{o} \iff x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + x_3\mathbf{b}_3 + x_4\mathbf{b}_4 = \mathbf{o}$$

である. B の形より明らかに $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_3\}$ は 1 次独立であり,

$$\mathbf{b}_2 = 2\mathbf{b}_1, \quad \mathbf{b}_4 = -\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_3$$

であるから, $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3\}$ は 1 次独立であり,

$$\mathbf{a}_2 = 2\mathbf{a}_1, \quad \mathbf{a}_4 = -\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3$$

であることがわかる. よって, $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}$ の 1 次独立なベクトルの最大個数は 2 であり, $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3\}$, すなわち

$$\left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \right\} \quad \cdots\cdots \quad (\text{答え})$$

が $\mathrm{Im}\, f$ のひとつの基となる.

以上より, f の像と核の次元は

$$\dim(\mathrm{Im}\, f) = \mathbf{2}, \quad \dim(\mathrm{Ker}\, f) = \mathbf{2} \quad \cdots\cdots \quad (\text{答え})$$

となる. □

解説・講評　問題 4 は線形写像の像と核の基底と次元を求める問題です. 正しく理由を述べて 3 点, 基底を正しく求めて 2 点, 次元を正しく求めて 2 点とし, 7 点満点で採点しました. 上の解答例では, A の階段行列 B を正しく求めて 3 点, 像の基底, 像の次元, 核の基底, 核の次元を正しく求めて各 1 点としました. 概ねよくできていました. 連立 1 次方程式を解いたり, 1 次独立性を調べたりする際に, 行列を全く用いていない答案も目立ちました. 像や核の意味をよく理解している点はよいのですが, より変数の多い状況ではこのような方法は実行が難しくなります. 行列を用いる方法も復習してほしいと思います. 一方, 行基本変形の際に計算を間違えている答案がいくつかありました. あまり早い段階で誤りがあると部分点をつけにくく, 理屈はわかっていそうでも 0 点にせざるをえない答案もありました. 像や核の意味がわかっていれば, 検算することも可能です. くれぐれも計算の間違いには気をつけてほしいと思います.

満点　**25** 点

配点　第 1 問：**7** 点　第 2 問：**6** 点　第 3 問：**5** 点　第 4 問：**7** 点

受験者の平均点　**17.47** 点