

部分空間の基底に関する問題

数ベクトル空間の 2 つの部分空間の和空間・共通部分の基底を求める問題を解いてみよう.

問題 $\mathbf{R}^4$ の次のようなベクトルで生成される部分空間を考える.

$$V = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle, \quad W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

- (1) V, W の次元を求めよ.
- (2) $V \cap W$ の基底を一つ求めよ.
- (3) $V \cap W$ には含まれないようなベクトルを V, W から適当に選び, (2) で与えたものと合わせて $\mathbf{R}^4$ 全体の基底となるようにせよ.

解答例 問題にある $\mathbf{R}^4$ のベクトルを左から順に $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ としよう. すなわち, V は $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ により生成される部分空間であり, W は $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ により生成される部分空間である.

(1) 行列 $A = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]$ を行基本変形によって階段行列にしてみよう. まず, 第 1 行を第 3 行に, 第 2 行を第 1 行に, 第 3 行を第 2 行に移し, 新しい第 1 行の $-2, -1$ 倍をそれぞれ新しい第 3, 第 4 行に加えると

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

となる. さらに, 第 2 行の $-1, 1$ 倍をそれぞれ第 1, 第 3 行に加え, 新しい第 3 行の $1, 2$ 倍をそれぞれ新しい第 2, 4 行に加えて, 最後に第 3 行を -1 倍すると

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となる. 得られた階段行列を $A' = [\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2, \mathbf{a}'_3]$ とおく. A' は A を行基本変形した行列であるから, $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ に対し,

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + x_3 \mathbf{a}_3 = \mathbf{0} \iff x_1 \mathbf{a}'_1 + x_2 \mathbf{a}'_2 + x_3 \mathbf{a}'_3 = \mathbf{0} \quad (*)$$

が成り立つ. ここで, $\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2, \mathbf{a}'_3$ は明らかに線形独立であるから, $x_1\mathbf{a}'_1 + x_2\mathbf{a}'_2 + x_3\mathbf{a}'_3 = \mathbf{0}$ をみたす x_1, x_2, x_3 は $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ 以外には存在しない. よって, (*) より, $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$ をみたす x_1, x_2, x_3 は $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ 以外には存在しない. つまり, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ も線形独立となる. よって, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ は V の基底であり, V の次元は 3 である.

行列 $B = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3]$ を行基本変形によって階段行列にしてみよう. まず, 第 1 行の -1 倍を第 3, 第 4 行に加え, 新しい第 2 行の -1 倍を新しい第 1 行に加えると

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となる. さらに, 第 3 行の $-1, 1$ 倍をそれぞれ第 1, 第 2 行に加えると

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となる. 得られた階段行列を $B' = [\mathbf{b}'_1, \mathbf{b}'_2, \mathbf{b}'_3]$ とおく. B' は B を行基本変形した行列であるから, $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ に対し,

$$x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + x_3\mathbf{b}_3 = \mathbf{0} \iff x_1\mathbf{b}'_1 + x_2\mathbf{b}'_2 + x_3\mathbf{b}'_3 = \mathbf{0} \quad (**)$$

が成り立つ. ここで, $\mathbf{b}'_1, \mathbf{b}'_2, \mathbf{b}'_3$ は明らかに線形独立であるから, $x_1\mathbf{b}'_1 + x_2\mathbf{b}'_2 + x_3\mathbf{b}'_3 = \mathbf{0}$ をみたす x_1, x_2, x_3 は $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ 以外には存在しない. よって, (**) より, $x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + x_3\mathbf{b}_3 = \mathbf{0}$ をみたす x_1, x_2, x_3 は $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ 以外には存在しない. つまり, $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ も線形独立となる. よって, $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ は W の基底であり, W の次元は 3 である.

(2) $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ が $\mathbf{x} \in V$ となるための必要十分条件は, $\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3$ となるような $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ が存在することである. 同様に, $\mathbf{x} \in W$ となるためには $\mathbf{x} = y_1\mathbf{b}_1 + y_2\mathbf{b}_2 + y_3\mathbf{b}_3$ となるような $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$ が存在することが必要十分である. この 2 式から $\mathbf{x}$ を消去すると

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 - y_1\mathbf{b}_1 - y_2\mathbf{b}_2 - y_3\mathbf{b}_3 = \mathbf{0}$$

となるから,

$$C = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ -y_1 \\ -y_2 \\ -y_3 \end{bmatrix}$$

とにおいて, 連立1次方程式 $C\mathbf{z} = \mathbf{0}$ を解いてみよう. 係数行列 C を行基本変形により階段行列にすると

$$\begin{aligned}
 C &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 7 \end{bmatrix} \\
 &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 7/5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 7/5 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

となる. 得られた階段行列を $C' = [\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4, \mathbf{c}_5, \mathbf{c}_6]$ とおく. $C\mathbf{z} = \mathbf{0}$ の解空間は $C'\mathbf{z} = \mathbf{0}$ の解空間に等しい. $C'\mathbf{z} = \mathbf{0}$ の解は, c_1, c_2 を任意の実数とすると,

$$x_1 = -\frac{3}{5}c_2, \quad x_2 = c_1 - \frac{1}{5}c_2, \quad x_3 = -\frac{1}{5}c_2, \quad y_1 = \frac{7}{5}c_2, \quad y_2 = c_1, \quad y_3 = c_2$$

と表される. よって,

$$\begin{aligned}
 V \cap W &= \left\{ x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 \mid x_1 = -\frac{3}{5}c_2, x_2 = c_1 - \frac{1}{5}c_2, x_3 = -\frac{1}{5}c_2, (c_1, c_2 \in \mathbf{R}) \right\} \\
 &= \left\{ -\frac{3}{5}c_2\mathbf{a}_1 + \left(c_1 - \frac{1}{5}c_2\right)\mathbf{a}_2 - \frac{1}{5}c_2\mathbf{a}_3 \mid c_1, c_2 \in \mathbf{R} \right\} \\
 &= \left\{ c_1\mathbf{a}_2 + c_2 \left(-\frac{3}{5}\mathbf{a}_1 - \frac{1}{5}\mathbf{a}_2 - \frac{1}{5}\mathbf{a}_3\right) \mid c_1, c_2 \in \mathbf{R} \right\} \\
 &= \left\langle \mathbf{a}_2, -\frac{3}{5}\mathbf{a}_1 - \frac{1}{5}\mathbf{a}_2 - \frac{1}{5}\mathbf{a}_3 \right\rangle = \langle \mathbf{a}_2, 3\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 \rangle
 \end{aligned}$$

となる. C' は C から行基本変形によって得られるので, $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4, \mathbf{c}_5, \mathbf{c}_6$ の間に成り立つ1次関係式と, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ の間に成り立つ1次関係式は同じである. $\mathbf{c}_2, 3\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_3$ は1次独立であるから, $\mathbf{a}_2, 3\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$ も1次独立である. よって, $\mathbf{a}_2, 3\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$ は $V \cap W$ の基底である. 1番目のベクトルの -1 倍を2番目のベクトルに足して, $\mathbf{a}_2, 3\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3$ としたものの, $V \cap W$ の基底である.

(3) (2) より, $\mathbf{a}_2, 3\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3$ は $V \cap W$ の1つの基底である. $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4, \mathbf{c}_5, \mathbf{c}_6$ の間に成り立つ1次関係式と, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ の間に成り立つ1次関係式は同じであった. $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4$ は明らかに1次独立であるから, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1$ も1次独立である. 1番目のベクトルの3倍を3番目のベクトルに足すと, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, 3\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1$ となるが, こ

れも 1 次独立である. つまり, $\mathbf{R}^4$ の 1 つの基底である. さらに, これは, $V \cap W$ の基底 $\mathbf{a}_2, 3\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3$ に, V のベクトル $\mathbf{a}_1$ と, W のベクトル $\mathbf{b}_1$ を加えたものである. よって, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, 3\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1$ が条件をみたす $\mathbf{R}^4$ の基底である. $\square$

注意 言うまでもないが, (2), (3) の答えは一通りではない. $\diamond$

注意 (2) の $V \cap W$ の基底は $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ を用いて, 次のようにして求めてもよい.

$$\begin{aligned} V \cap W &= \left\{ y_1 \mathbf{b}_1 + y_2 \mathbf{b}_2 + y_3 \mathbf{b}_3 \mid y_1 = -\frac{7}{5}c_2, y_2 = c_1, y_3 = c_2 (c_1, c_2 \in \mathbf{R}) \right\} \\ &= \left\{ -\frac{7}{5}c_2 \mathbf{b}_1 + c_1 \mathbf{b}_2 + c_2 \mathbf{b}_3 \mid c_1, c_2 \in \mathbf{R} \right\} \\ &= \left\{ c_1 \mathbf{b}_2 + c_2 \left(-\frac{7}{5} \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_3 \right) \mid c_1, c_2 \in \mathbf{R} \right\} \\ &= \left\langle \mathbf{b}_2, -\frac{7}{5} \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_3 \right\rangle = \langle \mathbf{b}_2, 7\mathbf{b}_1 - 5\mathbf{b}_3 \rangle \end{aligned}$$

このとき, $\mathbf{b}_2, 7\mathbf{b}_1 - 5\mathbf{b}_3$ が $V \cap W$ の 1 つの基底である. 実際, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2$ であり, $7\mathbf{b}_1 - 5\mathbf{b}_3 = 3\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$ である. $\diamond$