復習：原始関数の計算

・置換積分，部分積分

・有理関数 $Q(x)/P(x)$ の原始関数

$$\int \frac{Q(x)}{P(x)}\,dx$$ の計算

1) $Q(x)$ の次数 $\geq P(x)$ の次数のときは
割り算して分子の次数 $<$ $P(x)$ の次数とする.

2) $P(x)$ を1次式と2次式の積の形に
因数分解する.

3) 2) を用いて有理式を部分分数に
展開する.

4) 各部分分数に対して積分を行う.

$$\int \frac{dx}{(x+a)^n} \quad \text{または} \quad \int \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^m}\,dx$$

の形である. ⇒ 実行可能.

(II) 三角関数の積分

$$\int R(\cos x, \sin x)\,dx \text{ の計算}$$

↳2変数の有理式

$t = \tan\frac{x}{2}$ とおく

$$\cos x = \cos\left(2\cdot\frac{x}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1} = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

↑ $\cos^2\frac{x}{2}$ で分子・分母を割る.

$$\sin x = 2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}$$

$$= \frac{2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

$(\sin x)'$ を計算して $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$

$$\int R(\cos x, \sin x)\,dx = \int \underbrace{R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}}_{}\,dt$$

↑ t の有理式

(III) 無理関数

(A) $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ の計算

$a>0$ のとき, $\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}\,x$ とおく.

$\Rightarrow \cancel{ax^2} + bx + c = t^2 - 2\sqrt{a}\,tx + \cancel{ax^2}$

dx と dt の関係

$(b+2\sqrt{a}t)x = t^2 - c \Rightarrow x$ が t^2 でかける.

$\Rightarrow$ t の有理式

実数 $(\alpha<\beta)$

$a<0$ のとき $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$

とおいて, $t = \sqrt{\dfrac{x-\alpha}{\beta-x}}$ とする.

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = \sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}(-a)(\beta-x)^2}$$

t

$= (\beta-x)\sqrt{-a}\,t$ ← t の有理式

になる

$t^2 = \dfrac{x-\alpha}{\beta-x} \Rightarrow (\beta-x)t^2 = x-\alpha$

$(1+t^2)x = \beta t^2 + \alpha$, $x = \dfrac{\beta t^2+\alpha}{1+t^2}$, $dx = (\cdots)\,dt$

$\Rightarrow \int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ は t の有理式の積分.

§3. 微分方程式

未知関数

$x, y, y', \dots, y^{(n)}$ を含んだ方程式：(常)微分方程式

例) $y'' + xy' - y = 0$

例) 落下運動 $y(t)$：t秒後の落下距離

$y(0) = 0$ とする. $\dfrac{dy}{dt}(t) = \underline{v(t)}$ $v(0) = 0$

速度

$\dfrac{dv(t)}{dt} = g$ (← 重力定数)

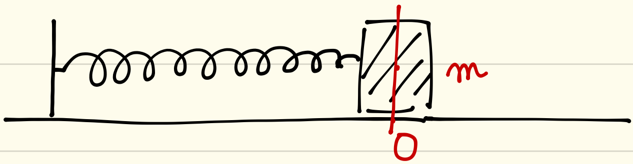
加速度

$\therefore\ y''(t) = g \rightsquigarrow v' = g \Rightarrow v = gt + C \Rightarrow v(0) = \overset{0}{\overset{\|}{C}}$

$v(t) = gt = y' \Rightarrow y = \frac{1}{2}gt^2 + C \quad y(0) = C = 0$

$y = \frac{1}{2}gt^2$

例)



$x(t)$：t秒後の位置

フックの法則 $F = -kx$　k：定数

質量

$F = mx'' \Rightarrow mx'' = -kx$

微分方程式〜作る〜 localな情報から globalな挙動を得る.

限界がある

用語：微分方程式の階数＝方程式に含まれる $y^{(k)}$ の k の最大値.

n 階微分方程式の解で n 個の積分定数を含むものを一般解という. そうでないものを特殊解という.

(I) 変数分離形： $y' = f(x)g(y)$ の形

$\Rightarrow \dfrac{y'dx}{g(y)} = f(x)dx \quad \displaystyle\int \frac{\overset{dy}{\boxed{y'dx}}}{g(y)} = \int f(x)dx$

$\Rightarrow \displaystyle\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx \Rightarrow$ これより y を求める

例) $\dfrac{d^2x}{dt^2} = g - a\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2$ $g, a > 0$ $x(0) = x'(0) = 0$ とする.

$y = \dfrac{dx}{dt}$ とおくと, $y' = g - ay^2$

$\displaystyle\int \frac{dy}{g - ay^2} = \int dt = t + C$

$\displaystyle\text{〃}\int \frac{dy}{(\sqrt{g} - \sqrt{a}y)(\sqrt{g} + \sqrt{a}y)} = \int \left(\frac{1}{\sqrt{g} - \sqrt{a}y} + \frac{1}{\sqrt{g} + \sqrt{a}y}\right)\frac{1}{2\sqrt{g}}dy$

$= \dfrac{1}{2\sqrt{ag}} \log\left|\dfrac{\quad}{\quad}\right|$

(II) 同次形：$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ の形

$u = \frac{y}{x}$ とおく．$y = xu \Rightarrow \overset{f(u)}{y'} = u + xu'$

$u' = \frac{1}{x}(f(u) - u)$ ← 変数分離 for u.

(III) 1階線型微分方程式

$$y' + P(x)y = Q(x)$$ の形

$Q(x) \equiv 0$ の形を同次形という．

1° $Q(x) \equiv 0$ のとき．$y' + P(x)y = 0$, $y' = -P(x)y$ 変数分離

$\rightsquigarrow \frac{y'}{y} = -P(x) \rightsquigarrow \log y = \int -P(x)dx + C$

$$y = e^{\int -P(x)dx + C} = Ae^{-\int P(x)dx} \quad \text{—— ㊉}$$

2° $Q(x) \not\equiv 0$ のとき，㊉ で A を $A(x)$ として元の微分方程式をみたすように決める（定数変化法）

$y = A(x)e^{-\int P(x)dx}$ とする．

$$y' = A'(x)e^{-\int P(x)dx} + \underbrace{A(x)e^{-\int P(x)dx}}_{y}(-P(x))$$

$$= A'(x)e^{-\int P(x)dx} - P(x)y$$

$y=A(x)e^{-\int P(x)dx}$ とする.

$$y'=A'(x)e^{-\int P(x)dx}+\underbrace{A(x)e^{-\int P(x)dx}}_{y}(-P(x))$$

$$=A'(x)e^{-\int P(x)dx}-P(x)y$$

$$\therefore\ y'+P(x)y=\underbrace{A'(x)e^{-\int P(x)dx}=Q(x)}_{\text{Aの微分方程式}}$$

$$\therefore\ A'(x)=Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

$$\therefore\ A(x)=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C$$

よって $y=A(x)e^{-\int P(x)dx}=e^{-\int P(x)dx}\left\{\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right\}$