2章　コンピュータの世界と紙の世界

2.1 惑星の公転の計算

コンピュータで計算するまで

- 現実世界

⇩ 注目する事象の選択
モデル化

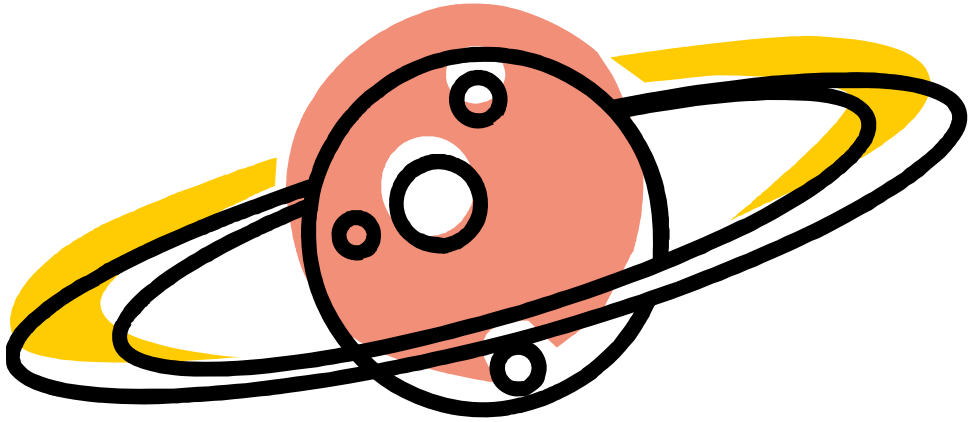
- 紙の上の世界

⇩ 計算する方法の考案
計算誤差

- コンピュータの世界

現実世界→紙の上の世界

- 何に注目するか
  - 惑星の公転の軌道
- 何を無視するか
  - 恒星の動き
- 既知の事柄
  - 惑星の運動軌道は2次元平面上
  - 万有引力の法則



→時刻tにおける惑星の位置x(t)のモデル化

紙の上の世界→コンピュータの世界

- $\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{x}(t) = -\frac{GM}{|\mathbf{x}(t)^3|}\mathbf{x}(t)$ と初期時刻のデータから惑星の軌道を計算

- 計算の方法
  - 微分係数の近似計算

- 計算誤差
  - 打ち切り誤差

惑星の軌道の計算

- $u(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}\cong\dfrac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$ より $x(t+\Delta t)\cong x(t)+u(t)\Delta t$ yも同様
- 加速度についても $u(t+\Delta t)\cong u(t)+a(t)\Delta t$
- $a(t)=\dfrac{d^2x(t)}{dt^2}=\dfrac{-GMx(t)}{\{x(t)^2+y(t)^2\}^{3/2}}$ だから $u(t+\Delta t)\cong u(t)+\dfrac{-GMx(t)}{\{x(t)^2+y(t)^2\}^{3/2}}\Delta t$
- 時刻tの位置x(t)と速度v(t)から、時刻t+Δtの位置x(t+Δt)と速度v(t+Δt)の近似値を計算

$$x(t+\Delta t)\cong x(t)+u(t)\Delta t \qquad u(t+\Delta t)\cong u(t)+\frac{-GMx(t)}{\{x(t)^2+y(t)^2\}^{3/2}}\Delta t$$

$$y(t+\Delta t)\cong y(t)+v(t)\Delta t \qquad v(t+\Delta t)\cong v(t)+\frac{-GMy(t)}{\{x(t)^2+y(t)^2\}^{3/2}}\Delta t$$

漸化式での表現

- 時刻 $t_0, t_0+\Delta t, t_0+2\Delta t, \ldots$ の位置ベクトルを $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \ldots$
- 速度ベクトルを $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}, \ldots$
- 各時刻の位置と速度の漸化式は以下の通り

$$x_{i+1} = x_i + u_i \Delta t$$

$$y_{i+1} = y_i + v_i \Delta t$$

$$u_{i+1} = u_i - \frac{x_i \Delta t}{(x_i^2 + y_i^2)^{3/2}}$$

$$v_{i+1} = v_i - \frac{y_i \Delta t}{(x_i^2 + y_i^2)^{3/2}}$$

参考：前ページの近似式

$$x(t+\Delta t) \cong x(t) + u(t)\Delta t$$

$$y(t+\Delta t) \cong y(t) + v(t)\Delta t$$

$$u(t+\Delta t) \cong u(t) + \frac{-GMx(t)}{\{x(t)^2 + y(t)^2\}^{3/2}} \Delta t$$

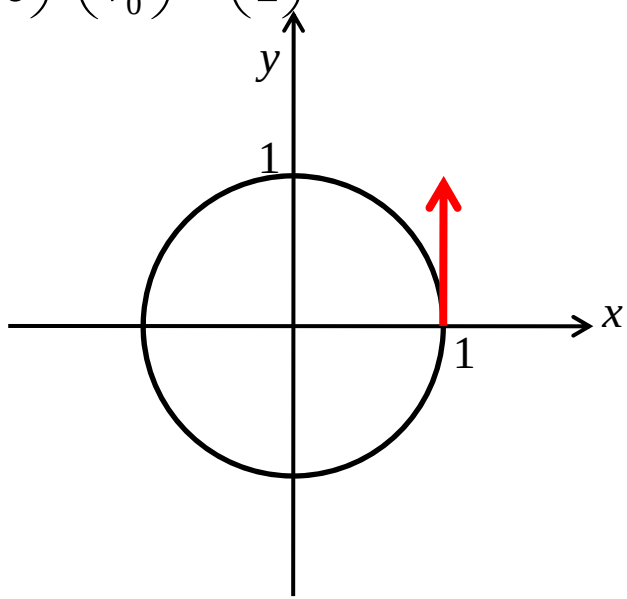
$$v(t+\Delta t) \cong v(t) + \frac{-GMy(t)}{\{x(t)^2 + y(t)^2\}^{3/2}} \Delta t$$

実際の計算における問題

- 変数の型をどうするか
- Δtの値(分割数)をどれくらいにするか

- 位置と速度の初期値を $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で計算

→軌道は円になるはず



教科書p.48-p.49の図

- 円軌道になっていない
  - 微分の近似計算による誤差
    - 分割数を大きくしてΔtを細かくする→円軌道に
    - こちらが誤差の原因
  - 浮動小数点数の計算の誤差
    - double(仮数部52ビット)→float(仮数部23ビット)に変更すると誤差が増えそうだがあまり変わらない(図2.6)

2.2 計算結果を分析しよう

打ち切り誤差

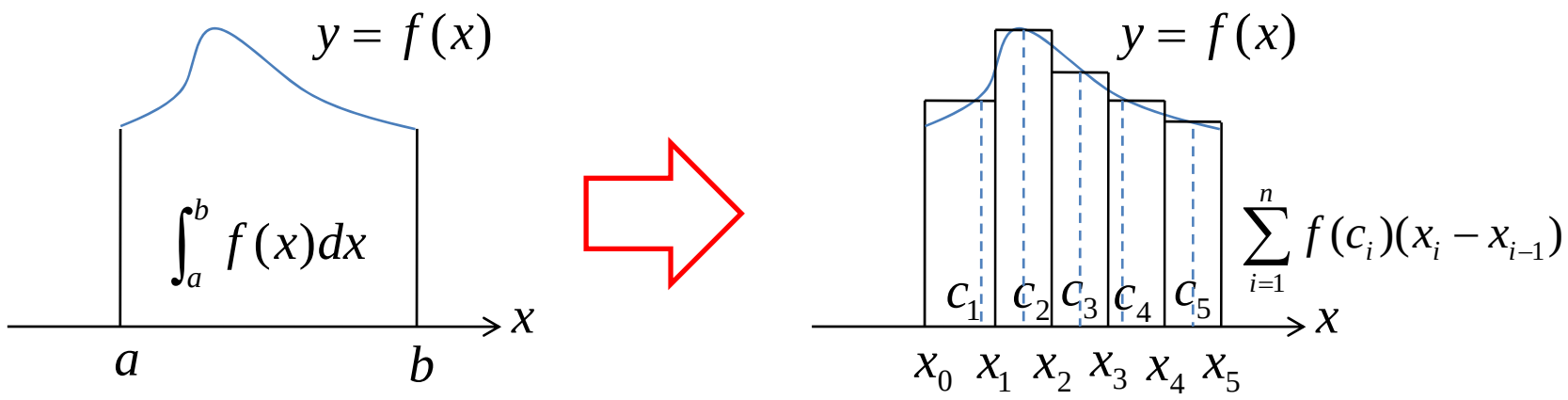
- 有限の範囲で計算を打ちきることによる誤差

定積分の復習

- 連続関数$y = f(x)$の区間$[a,b]$における定積分$\int_a^b f(x)dx$
- 対象区間$[a,b]$をn個の小区間に分割　中点をc_i

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b \qquad x_0 \le c_1 \le x_1, x_1 \le c_2 \le x_2, \ldots, x_{n-1} \le c_n \le x_n$$

リーマン和で近似

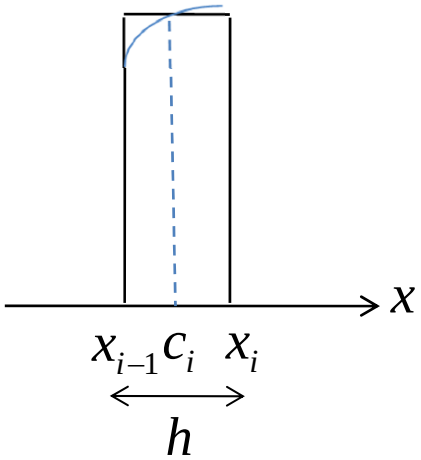


面積の近似

- 中点公式

$$M_n = h\sum_{i=1}^{n} f(a+(i-\frac{1}{2})h)$$

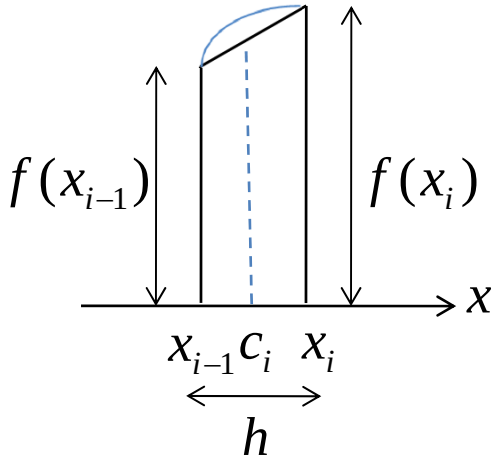
$$h = \frac{b-a}{n}$$



- 台形公式

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{h}{2}\{f(x_{i-1}) + f(x_i)\}$$

$$= h\{\frac{1}{2} f(a) + \sum_{i=1}^{n-1} f(a+hi) + \frac{1}{2} f(b)\}$$



log2の計算結果

- 教科書p.54,p.55の表
  - n(分割数)が大きいほど真の値に近づく
    I=log2=0.69314718…
- 中点公式(階段関数で近似)と台形公式(折れ線関数で近似)のどちらが収束が早いか

→ほぼ同じ　nが2倍になると、$I-M_n$ も $I-T_n$ も $\frac{1}{4}$ 倍

$$\frac{I-M_n}{I-M_{n/2}} \cong \frac{1}{4} \qquad \frac{I-T_n}{I-T_{n/2}} \cong \frac{1}{4}$$

- $I-M_n$ はおよそ $\frac{1}{n^2}$ に比例

計算結果の改善

- $\dfrac{\log 2 - M_{256}}{\log 2 - M_{128}} \cong \dfrac{1}{4}$ が正しいと仮定すると $\log 2 \cong \dfrac{4}{3} M_{256} - \dfrac{1}{3} M_{128}$

→一般に $\log 2 \cong \dfrac{4}{3} M_{2n} - \dfrac{1}{3} M_n$ となる $\tilde{M}_{2n} \equiv \dfrac{4}{3} M_{2n} - \dfrac{1}{3} M_n$

- 台形公式についても同様 $\tilde{T}_{2n} \equiv \dfrac{4}{3} T_{2n} - \dfrac{1}{3} T_n$

n	$\tilde{M}_n$	$I - \tilde{M}_n$	$\dfrac{I - \tilde{M}_n}{I - \tilde{M}_{n/2}}$
4	0.6930550931	9.20875×10^{-5}	
8	0.6931407750	6.40557×10^{-6}	0.0695596612
16	0.6931467678	4.12799×10^{-7}	0.0644438130
32	0.6931471546	2.60068×10^{-8}	0.0630011533
64	0.6931471789	1.62871×10^{-9}	0.0626263626
128	0.6931471805	1.01846×10^{-10}	0.0625316970
256	0.6931471806	6.36546×10^{-12}	0.0625006813

$I - \tilde{M}_n$ は $\dfrac{1}{n^4}$ に比例

$\cong \dfrac{1}{16}$

収束の度合い

- $I - M_n \quad I - T_n$ はおよそ $\frac{1}{n^2}$ に比例
- $I - \tilde{M}_n \quad I - \tilde{T}_n$ はおよそ $\frac{1}{n^4}$ に比例
- $\tilde{M}_n \quad \tilde{T}_n$ は $M_n \quad T_n$ より優れている(収束が速い)

観察から分析へ

- 真の値$I=\int_a^b f(x)dx$とM_n T_nの差(打ち切り誤差)

$f(x)$が2回連続微分可能のとき

$$I-M_n \cong \frac{h^2}{24}\{f'(b)-f'(a)\}$$

$$I-T_n \cong -\frac{h^2}{12}\{f'(b)-f'(a)\}$$

$f(x)=\frac{1}{x}$ なら $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ だから

$$I \cong M_n+\frac{h^2}{24}\{f'(b)-f'(a)\} \equiv \overline{M}_n$$

$$I \cong T_n-\frac{h^2}{12}\{f'(b)-f'(a)\} \equiv \overline{T}_n$$

$\overline{M}_n$ $\overline{T}_n$ の表(教科書p.59)

→$I-\overline{M}_n$も$I-\overline{T}_n$ もおよそ$\frac{1}{n^4}$ に比例

$\overline{M}_n$と$\tilde{M}_n$の比較

$$\overline{M}_n \equiv M_n + \frac{h^2}{24}\{f'(b) - f'(a)\}$$

$$\tilde{M}_n \equiv \frac{4}{3}M_n - \frac{1}{3}M_{n/2}$$

$$M_n = h\sum_{i=1}^{n} f(a + (i - \frac{1}{2})h)$$

- nを固定した時、$\overline{M}_n$の方が$\tilde{M}_n$ より正確(表より)
- 計算の手間:$\tilde{M}_n$ の方が面倒($M_{n/2}$の計算必要)

軌道計算の改良(1)

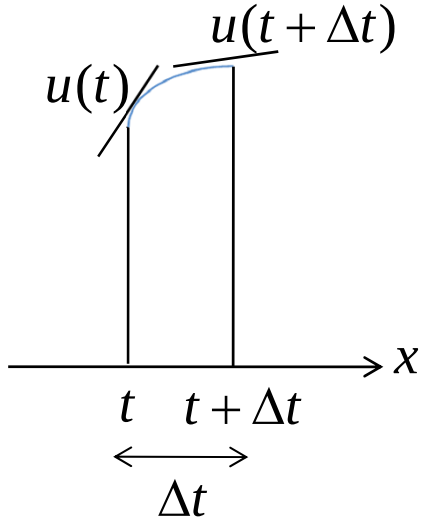
$$u(t) = \frac{dx(t)}{dt} \cong \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

$$x(t+\Delta t) \cong x(t) + u(t)\Delta t$$

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \int_t^{t+\Delta t} u(t)dt$$

台形公式で近似

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \frac{1}{2}\{u(t) + u(t+\Delta t)\}\Delta t$$



- 時刻 $t+\Delta t$ における速度$u(t+\Delta t)$

時刻 $t+\Delta t$における位置、速度、加速度

$$\tilde{x}(t+\Delta t) = x(t) + u(t)\Delta t$$
$$\tilde{y}(t+\Delta t) = y(t) + v(t)\Delta t$$
$$\tilde{u}(t+\Delta t) = u(t) + a(t)\Delta t$$
$$\tilde{v}(t+\Delta t) = v(t) + b(t)\Delta t$$

$$\tilde{a}(t+\Delta t) = -\frac{\tilde{x}(t+\Delta t)}{\{\tilde{x}(t+\Delta t)^2 + \tilde{y}(t+\Delta t)^2\}^{3/2}}$$

$$\tilde{b}(t+\Delta t) = -\frac{\tilde{y}(t+\Delta t)}{\{\tilde{x}(t+\Delta t)^2 + \tilde{y}(t+\Delta t)^2\}^{3/2}}$$

$$a(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{-GMx(t)}{\{x(t)^2 + y(t)^2\}^{3/2}}$$ だから

軌道計算の改良(2)

- 台形公式を適用

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \frac{1}{2}\{u(t) + \tilde{u}(t+\Delta t)\}\Delta t$$

$$y(t+\Delta t) = y(t) + \frac{1}{2}\{v(t) + \tilde{v}(t+\Delta t)\}\Delta t$$

$$u(t+\Delta t) = u(t) + \frac{1}{2}\{a(t) + \tilde{a}(t+\Delta t)\}\Delta t$$

$$v(t+\Delta t) = v(t) + \frac{1}{2}\{b(t) + \tilde{b}(t+\Delta t)\}\Delta t$$

- Δtを十分小さくとり、位置を求める
- ホイン法、拡張オイラー法
  - オイラー法では区間の平均の傾きを出発点だけで決めているが、ホイン法は両端で決めている
- 実行結果(p.63-64) 分割数nの誤差は$1/n^2$に比例