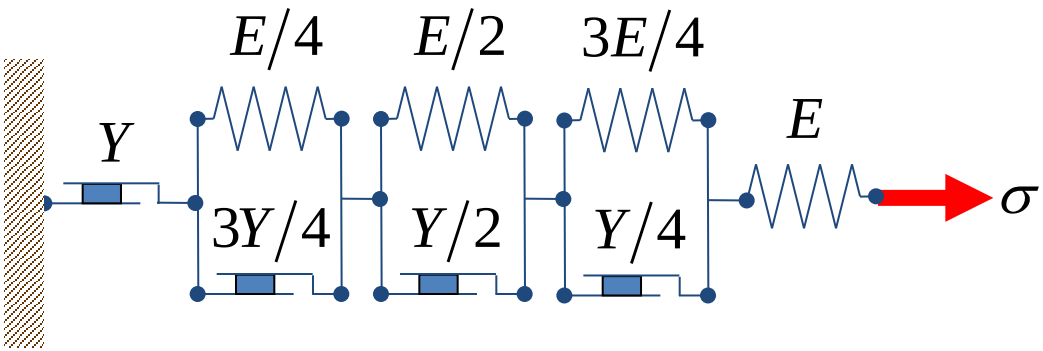
復習

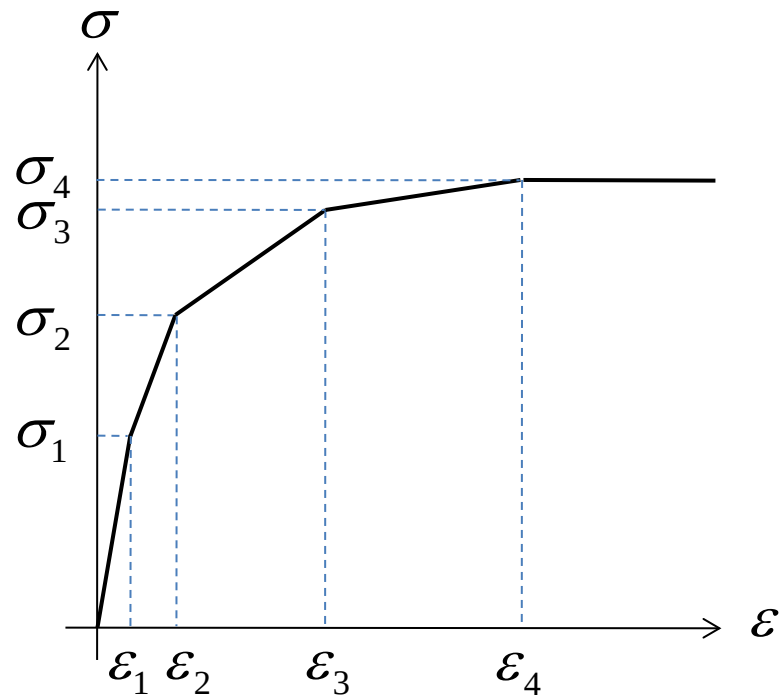
弾塑性力学
P.ティラポン
第15回：2014/7/29

7月31日（木） 期末試験（15：05～16：35） S224

2011年試験問題



図A バネ系



図B 応力･ひずみ関係

図Aに示すようにバネ系が壁に固定されている。もう一方の端点に水平方向の応力 σ を加え，ひずみεを伸びる。σ 徐々に大きくすると，それぞれバネが次々に降伏する。その σ とεとの関係が図Bのように表れる。各々バネの弾性係数Eおよび降伏応力Yを用いてσ_1, σ_2, σ_3, σ_4および ε_1, ε_2, ε_3, ε_4を求めよ。

解答: $\sigma_1 = Y/4, \sigma_2 = Y/2, \sigma_3 = 3Y/4, \sigma_4 = Y$

$$\varepsilon_1 = Y/4E, \varepsilon_2 = 5Y/6E, \varepsilon_3 = 23Y/12E, \varepsilon_4 = 4Y/E$$

宿題の解答

図2に示す単純ばりの上面($z=-h/2$)に等分布荷重wを受けている。重調和関数を満たすエアリー応力関数を決定するために，どのような応力の境界条件が求められているのか，その弱形式および強形式を書けよ。

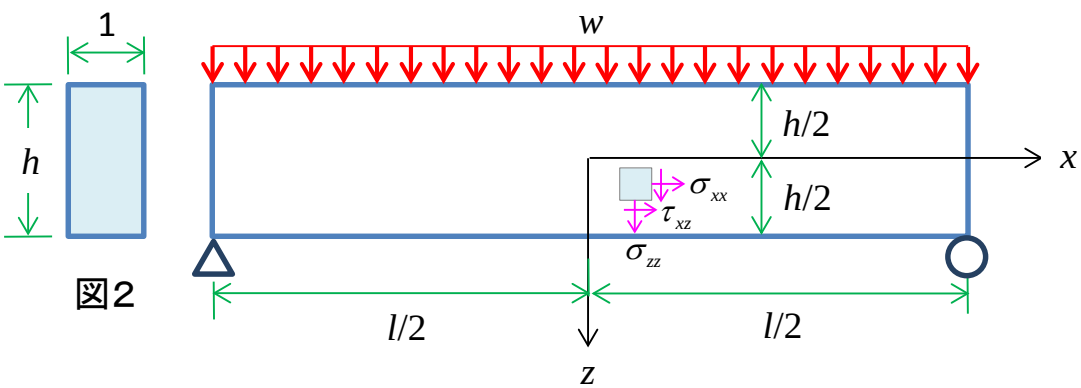


図2

応力成分

$$\sigma_x(F,x,z) := \frac{d^2}{dz^2} F(x,z)$$

$$\sigma_z(F,x,z) := \frac{d^2}{dx^2} F(x,z)$$

$$\tau_{xz}(F,x,z) := -\frac{d}{dx}\frac{d}{dz} F(x,z)$$

5次の多項式によるアエリーの応力関数

$$F(x,z) := a_2 x^2 + b_2 x z + c_2 z^2 + a_3 x^3 + b_3 x^2 z + c_3 x z^2 + d_3 z^3 + a_4 x^4 + b_4 x^3 z + c_4 x^2 z^2 + d_4 x z^3 + \left(-a_4 - \frac{1}{3} c_4\right) z^4 \ldots$$
$$+ a_5 x^5 + b_5 x^4 z + c_5 x^3 z^2 + d_5 x^2 z^3 + \left(-5 a_5 - c_5\right) x z^4 + \left(\frac{-1}{5} b_5 - \frac{1}{5} d_5\right) z^5$$

定数の未知数 (15個)　a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3, d_3, a_4, b_4, c_4, d_4, a_5, b_5, c_5, d_5

応力成分

$$\sigma_x(x,z) := \sigma_x(F,x,z) \text{ collect}, x, z \rightarrow 2 c_5 x^3 + \left(2 c_4 + 6 d_5 z\right) x^2 + \left[\left(-60 a_5 - 12 c_5\right) z^2 + 6 d_4 z + 2 c_3\right] x + \left(-4 b_5 - 4 d_5\right) z^3 + \left(-12 a_4 - 4 c_4\right) z^2 + 6 d_3 z + 2 c_2$$

$$\sigma_z(x,z) := \sigma_z(F,x,z) \text{ collect}, x, z \rightarrow 20 a_5 x^3 + \left(12 a_4 + 12 b_5 z\right) x^2 + \left(6 b_4 z + 6 c_5 z^2 + 6 a_3\right) x + 2 a_2 + 2 c_4 z^2 + 2 b_3 z + 2 d_5 z^3$$

$$\tau_{xz}(x,z) := \tau_{xz}(F,x,z) \text{ collect}, x, z \rightarrow -4 b_5 x^3 + \left(-3 b_4 - 6 c_5 z\right) x^2 + \left(-4 c_4 z - 6 d_5 z^2 - 2 b_3\right) x + \left(20 a_5 + 4 c_5\right) z^3 - 3 d_4 z^2 - 2 c_3 z - b_2$$

強形式

$$\sigma_z\left(x,\frac{-h}{2}\right)+w=0 \text{ collect},x,z \rightarrow 20\cdot a_5\cdot x^3+\left(12\cdot a_4-6\cdot b_5\cdot h\right)\cdot x^2+\left(-3\cdot b_4\cdot h+\frac{3}{2}\cdot c_5\cdot h^2+6\cdot a_3\right)\cdot x+2\cdot a_2+\frac{1}{2}\cdot c_4\cdot h^2-b_3\cdot h-\frac{1}{4}\cdot d_5\cdot h^3+w=0$$

$$\tau_{xz}\left(x,\frac{-h}{2}\right)=0 \text{ collect},x,z \rightarrow -4\cdot b_5\cdot x^3+\left(-3\cdot b_4+3\cdot c_5\cdot h\right)\cdot x^2+\left(2\cdot c_4\cdot h-\frac{3}{2}\cdot d_5\cdot h^2-2\cdot b_3\right)\cdot x-\frac{1}{8}\cdot\left(20\cdot a_5+4\cdot c_5\right)\cdot h^3-\frac{3}{4}\cdot d_4\cdot h^2+c_3\cdot h-b_2=0$$

$$\sigma_z\left(x,\frac{h}{2}\right)=0 \text{ collect},x,z \rightarrow 20\cdot a_5\cdot x^3+\left(12\cdot a_4+6\cdot b_5\cdot h\right)\cdot x^2+\left(3\cdot b_4\cdot h+\frac{3}{2}\cdot c_5\cdot h^2+6\cdot a_3\right)\cdot x+2\cdot a_2+\frac{1}{2}\cdot c_4\cdot h^2+b_3\cdot h+\frac{1}{4}\cdot d_5\cdot h^3=0$$

$$\tau_{xz}\left(x,\frac{h}{2}\right)=0 \text{ collect},x,z \rightarrow -4\cdot b_5\cdot x^3+\left(-3\cdot b_4-3\cdot c_5\cdot h\right)\cdot x^2+\left(-2\cdot c_4\cdot h-\frac{3}{2}\cdot d_5\cdot h^2-2\cdot b_3\right)\cdot x+\frac{1}{8}\cdot\left(20\cdot a_5+4\cdot c_5\right)\cdot h^3-\frac{3}{4}\cdot d_4\cdot h^2-c_3\cdot h-b_2=0$$

連立式

$$\begin{array}{llll}
20\cdot a_5=0 & \left(12\cdot a_4-6\cdot b_5\cdot h\right)=0 & \left(-3\cdot b_4\cdot h+\frac{3}{2}\cdot c_5\cdot h^2+6\cdot a_3\right)=0 & 2\cdot a_2+\frac{1}{2}\cdot c_4\cdot h^2-b_3\cdot h-\frac{1}{4}\cdot d_5\cdot h^3+w=0 \\
-4\cdot b_5=0 & \left(-3\cdot b_4+3\cdot c_5\cdot h\right)=0 & \left(2\cdot c_4\cdot h-\frac{3}{2}\cdot d_5\cdot h^2-2\cdot b_3\right)=0 & \frac{-1}{8}\cdot\left(20\cdot a_5+4\cdot c_5\right)\cdot h^3-\frac{3}{4}\cdot d_4\cdot h^2+c_3\cdot h-b_2=0 \\
20\cdot a_5=0 & \left(12\cdot a_4+6\cdot b_5\cdot h\right)=0 & \left(3\cdot b_4\cdot h+\frac{3}{2}\cdot c_5\cdot h^2+6\cdot a_3\right)=0 & 2\cdot a_2+\frac{1}{2}\cdot c_4\cdot h^2+b_3\cdot h+\frac{1}{4}\cdot d_5\cdot h^3=0 \\
-4\cdot b_5=0 & \left(-3\cdot b_4-3\cdot c_5\cdot h\right)=0 & \left(-2\cdot c_4\cdot h-\frac{3}{2}\cdot d_5\cdot h^2-2\cdot b_3\right)=0 & \frac{1}{8}\cdot\left(20\cdot a_5+4\cdot c_5\right)\cdot h^3-\frac{3}{4}\cdot d_4\cdot h^2-c_3\cdot h-b_2=0
\end{array}$$

線形代数による解

$$a_2=-\tfrac{1}{4}w$$
$$b_2=-\tfrac{3}{4}d_4h^2$$
$$a_3=c_3=0$$
$$b_3=d_3$$
$$a_4=b_4=c_4=0$$
$$a_5=b_5=c_5=0$$
$$d_5=-wh^{-3}$$

未知 c_2, d_3, d_4

$$F_(x,z):=c_2\cdot z^2+d_3\cdot z^3+\frac{1}{20}\cdot\frac{\left(20\cdot x\cdot z^3\cdot h^3-15\cdot h^5\cdot x\cdot z\right)}{h^3}\cdot d_4+\frac{1}{20}\cdot\frac{\left(-5\cdot w\cdot x^2\cdot h^3+4\cdot w\cdot z^5-20\cdot w\cdot x^2\cdot z^3+15\cdot w\cdot x^2\cdot z\cdot h^2\right)}{h^3}$$

応力成分

$$\sigma_x(x,z):=\sigma_x(F,x,z) \text{ factor} \rightarrow \frac{1}{10}\cdot w\cdot z\cdot\frac{\left(-6\cdot h^2+15\cdot l^2+40\cdot z^2-60\cdot x^2\right)}{h^3}$$

$$\sigma_z(x,z):=\sigma_z(F,x,z) \text{ factor} \rightarrow \frac{-1}{2}\cdot w\cdot(z+h)\cdot\frac{(2\cdot z-h)^2}{h^3}$$

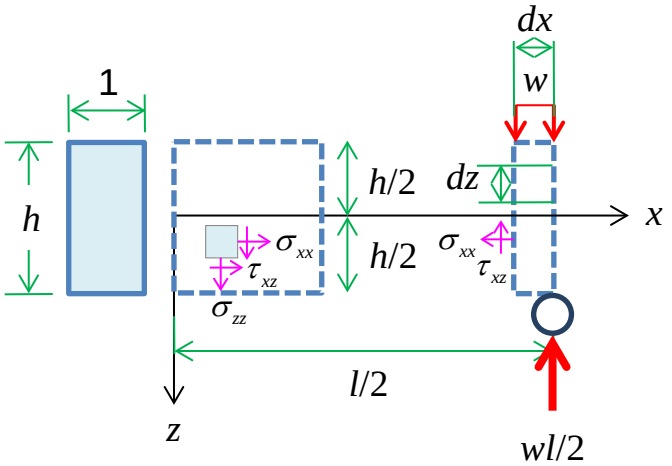
$$\tau_{xz}(x,z):=\tau_{xz}(F,x,z) \text{ factor} \rightarrow \frac{3}{2}\cdot w\cdot x\cdot(2\cdot z-h)\cdot\frac{(2\cdot z+h)}{h^3}$$

弱形式

$$\Sigma F_z\left(x=\frac{1}{2}\right)=0 \Rightarrow \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz}\left(\frac{1}{2},z\right)dz + w\cdot\frac{1}{2}=0 \text{ simplify } \rightarrow \frac{1}{2}\cdot d_4\cdot h^3=0$$

$$\Sigma F_x\left(x=\frac{1}{2}\right)=0 \Rightarrow \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x\left(\frac{1}{2},z\right)dz=0 \text{ simplify } \rightarrow 2\cdot c_2\cdot h=0$$

$$\Sigma M\left(x=\frac{1}{2}\right)=0 \Rightarrow \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x\left(\frac{1}{2},z\right)\cdot z\,dz=0 \text{ simplify } \rightarrow \frac{1}{20}\cdot w\cdot h^2+\frac{1}{4}\cdot 1\cdot d_4\cdot h^3-\frac{1}{8}\cdot w\cdot l^2+\frac{1}{2}\cdot d_3\cdot h^3=0$$



未知の解

$$d_4=0$$

$$c_2=0$$

$$d_3=\frac{w}{20h}\left(5\left(\frac{l}{h}\right)^2-2\right)$$

応力関数の解

$$F(x,z):=\left[\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{z}{h}\right)^5+\left[\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{h}\right)^2-\left(\frac{x}{h}\right)^2-\frac{1}{10}\right]\cdot\left(\frac{z}{h}\right)^3+\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{x}{h}\right)^2\cdot\frac{z}{h}-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{x}{h}\right)^2\right]\cdot w\cdot h^2$$

応力成分の解

$$\sigma_x(x,z):=\sigma_x(F,x,z) \text{ factor } \rightarrow \frac{1}{10}\cdot w\cdot z\cdot\frac{\left(-6\cdot h^2+15\cdot l^2+40\cdot z^2-60\cdot x^2\right)}{h^3}$$

$$\sigma_z(x,z):=\sigma_z(F,x,z) \text{ factor } \rightarrow \frac{-1}{2}\cdot w\cdot(z+h)\cdot\frac{(2\cdot z-h)^2}{h^3}$$

$$\tau_{xz}(x,z):=\tau_{xz}(F,x,z) \text{ factor } \rightarrow \frac{3}{2}\cdot w\cdot x\cdot(2\cdot z-h)\cdot\frac{(2\cdot z+h)}{h^3}$$

対象状態のチェック

$$\sigma_z(x,z)-\sigma_z(-x,z) \text{ simplify } \rightarrow 0$$

$$\sigma_x(x,z)-\sigma_x(-x,z) \text{ simplify } \rightarrow 0$$

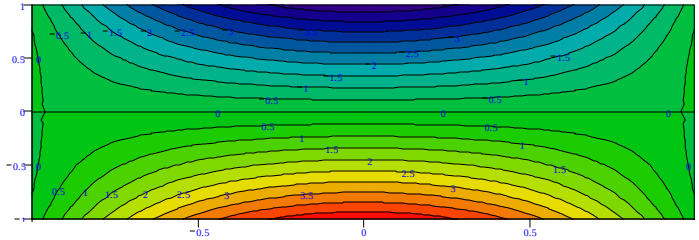
$$\tau_{xz}(x,z)--\tau_{xz}(-x,z) \text{ simplify } \rightarrow 0$$

平面応力条件下のひずみ成分

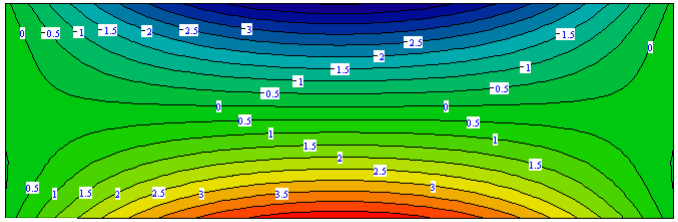
$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{xz}\end{Bmatrix}=\frac{1}{E}\begin{bmatrix}1 & -\nu & 0\\ -\nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2(1+\nu)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_z\\ \tau_{xz}\end{Bmatrix}$$

$l/h=5/2,\ \nu=1/3$

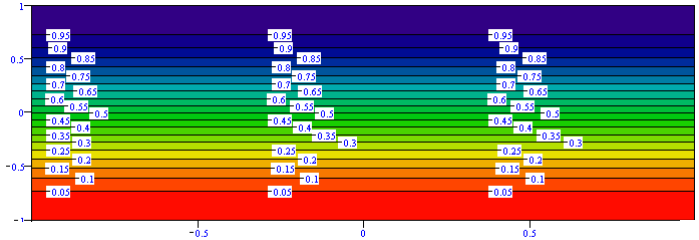
応力･ひずみ成分の可視化



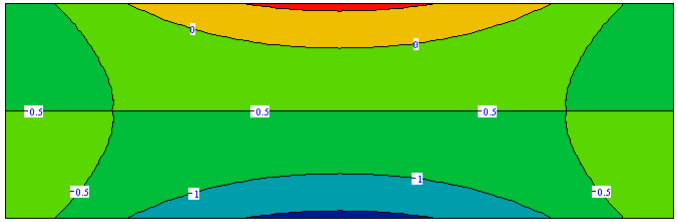
σ_x/w



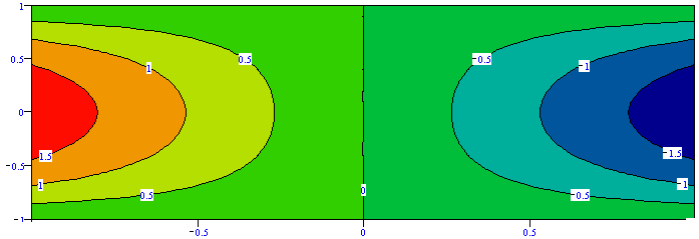
$E\varepsilon_x/w$



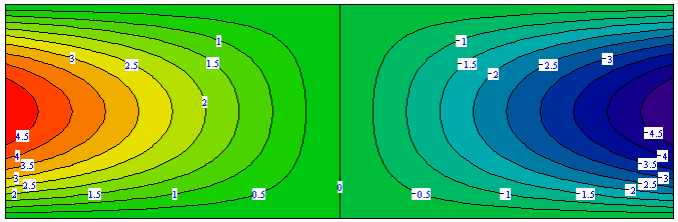
σ_z/w



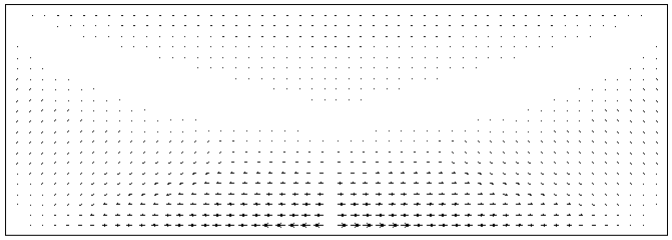
$E\varepsilon_z/w$



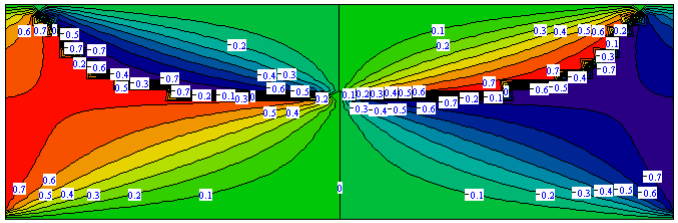
τ_{xz}/w



$E\gamma_{xz}/w$



σ_1/w



Ψ(rad)

平均応力

$$\sigma_p(x,z)=\frac{\sigma_x(x,z)+\sigma_z(x,z)}{2}$$

偏差応力

$$\sigma_q(x,z)=\sqrt{\left(\frac{\sigma_x(x,z)-\sigma_z(x,z)}{2}\right)^2+\tau_{xz}(x,z)^2}$$

最大主力

$$\sigma_1(x,z)=\sigma_p(x,z)+\sigma_q(x,z)$$

最小主力

$$\sigma_3(x,z)=\sigma_p(x,z)-\sigma_q(x,z)$$

主応力軸の回転角

$$\Psi(x,z)=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{atan}\left(\frac{2\cdot\tau_{xz}(x,z)}{\sigma_x(x,z)-\sigma_z(x,z)}\right)$$

授業評価

各講義の回答数確認方法

①ポータルへログイン
②授業評価【Course Evaluation】を選択
③アンケート実施状況照会画面
④実施学期の該当学期を選択
⑤科目ごとの回答数を確認

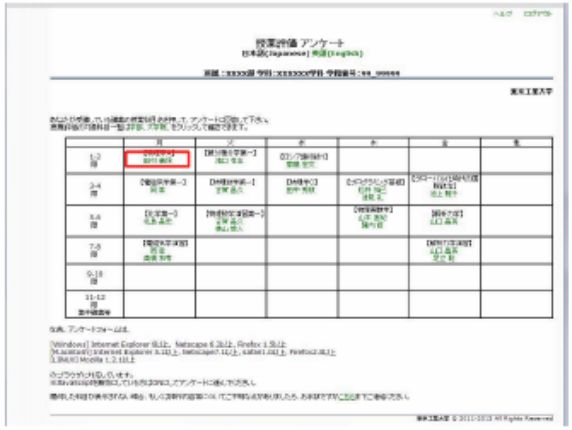
○学生宛の通知
（日本語）
http://www.titech.ac.jp/enrolled/news/pdf/j_hyoka_tuti01_j.pdf
（英語）
http://www.titech.ac.jp/enrolled/news/pdf/j_hyoka_tuti01_e.pdf

○授業評価対象科目の回答数確認方法
①ポータルへログイン http://portal.titech.ac.jp/
②授業評価【Course Evaluation】を選択
③アンケート実施状況照会画面で科目ごとの回答数を確認

授業評価アンケートでの学生からの回答や授業に関するコメントは、今後の教育改善のための有効な情報になると思います。さらには、大学としての教育改善の状況を把握する上でも重要な情報となりますので、ご協力方宜しくお願い申し上げます。

1.メニューの中から「授業評価【Course Evaluation】」を選択します

2.自分の申告している授業（アンケート対象科目のみ）が一覧で表示されますので、授業科目の担当教官名を選択します



期末試験

- 日時：2014年7月31日（木） 15:05 ～16:35
- 場所：S224
- 問題数：5問
- 教科書，ノート，メモ，携帯電話，電卓，辞書，計算機能を備えた腕時計等を使用禁止

宿題提出・再提出

- 締切：2014年7月30日（水） 17:30まで
- 提出先：学術国際情報センター（国際棟）ポストボックス I7-2

講義ノート

- 以下のサイトにて「弾塑性力学」で検索の上，最新版をダウンロードください。

http://www.ocw.titech.ac.jp