塑性変形

弾塑性力学
P.ティラポン
第14回：2014/7/24

7月31日（木） 期末試験（15：05～16：35） S224

塑性ひずみ増分

ミーゼスによる降伏関数

$$f=\frac{1}{2}\left(\left(\sigma_x-\sigma_y\right)^2+\left(\sigma_y-\sigma_z\right)^2+\left(\sigma_z-\sigma_x\right)^2+6\left(\tau_{xy}{}^2+\tau_{yz}{}^2+\tau_{zx}{}^2\right)\right)-Y^2=0$$

関連流れ則

$$d\varepsilon_x^p=d\lambda\frac{\partial f}{\partial\sigma_x}=d\lambda\left(2\sigma_x-\sigma_y-\sigma_z\right)$$

$$d\varepsilon_y^p=d\lambda\frac{\partial f}{\partial\sigma_y}=d\lambda\left(-\sigma_x+2\sigma_y-\sigma_z\right)$$

$$d\varepsilon_z^p=d\lambda\frac{\partial f}{\partial\sigma_z}=d\lambda\left(-\sigma_x-\sigma_y+2\sigma_z\right)$$

$$d\gamma_{xy}^p=d\lambda\frac{\partial f}{\partial\tau_{xy}}=6d\lambda\tau_{xy}$$

$$d\gamma_{yz}^p=d\lambda\frac{\partial f}{\partial\tau_{yz}}=6d\lambda\tau_{yz}$$

$$d\gamma_{zx}^p=d\lambda\frac{\partial f}{\partial\tau_{zx}}=6d\lambda\tau_{zx}$$

平均応力

$$p=\frac{1}{3}\left(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z\right)$$

偏差応力

$$s_x=\sigma_x-p=\frac{1}{3}\left(2\sigma_x-\sigma_y-\sigma_z\right)$$

$$s_y=\sigma_y-p=\frac{1}{3}\left(-\sigma_x+2\sigma_y-\sigma_z\right)$$

$$s_z=\sigma_z-p=\frac{1}{3}\left(-\sigma_x-\sigma_y+2\sigma_z\right)$$

相当応力

$$\bar{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(\left(\sigma_x-\sigma_y\right)^2+\left(\sigma_y-\sigma_z\right)^2+\left(\sigma_z-\sigma_x\right)^2+6\left(\tau_{xy}{}^2+\tau_{yz}{}^2+\tau_{zx}{}^2\right)\right)}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}\left(3\left(s_{xy}{}^2+s_{yz}{}^2+s_{zx}{}^2\right)+6\left(\tau_{xy}{}^2+\tau_{yz}{}^2+\tau_{zx}{}^2\right)\right)}$$

ロイスによる塑性ひずみ増分の比例

$$\frac{d\varepsilon_x^p}{s_x}=\frac{d\varepsilon_y^p}{s_y}=\frac{d\varepsilon_z^p}{s_z}=\frac{d\gamma_{xy}^p}{2\tau_{xy}}=\frac{d\gamma_{yz}^p}{2\tau_{yz}}=\frac{d\gamma_{zx}^p}{2\tau_{zx}}=\frac{3}{2}\frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\bar{\sigma}}$$

ミーゼスによる平面ひずみ状態

レヴィ・ミーゼスによる式

$$d\varepsilon_x^p = \frac{1}{2}\left(2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z\right)\frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\bar{\sigma}}$$

$$d\varepsilon_y^p = \frac{1}{2}\left(-\sigma_x + 2\sigma_y - \sigma_z\right)\frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\bar{\sigma}}$$

$$d\varepsilon_z^p = \frac{1}{2}\left(-\sigma_x - \sigma_y + 2\sigma_z\right)\frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\bar{\sigma}}$$

$$d\gamma_{xy}^p = 3\tau_{xy}\frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\bar{\sigma}}$$

$$d\gamma_{yz}^p = 3\tau_{yz}\frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\bar{\sigma}}$$

$$d\gamma_{zx}^p = 3\tau_{zx}\frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\bar{\sigma}}$$

平面ひずみ

$$d\varepsilon_z^p = 0$$

$$d\gamma_{yz}^p = 0$$

$$d\gamma_{zx}^p = 0$$

成り立つ条件

$$\sigma_z = \frac{1}{2}\left(\sigma_x + \sigma_y\right)$$

$$\tau_{yz} = 0$$

$$\tau_{zx} = 0$$

ミーゼスによる降伏関数

$$f = \frac{1}{2}\left(\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + \left(\sigma_y - \sigma_z\right)^2 + \left(\sigma_z - \sigma_x\right)^2 + 6\left(\tau_{xy}{}^2 + \tau_{yz}{}^2 + \tau_{zx}{}^2\right)\right) - Y^2 = 0$$

$$\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau_{xy}^2 = \frac{4}{3}Y^2$$

平均応力

$$p = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

応力行列

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) \end{bmatrix}$$

主応力成分

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau_{xy}^2} = p + \frac{1}{\sqrt{3}}Y$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) = p$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{2}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) - \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau_{xy}^2} = p - \frac{1}{\sqrt{3}}Y$$

2012年試験問題

図1に示すような左右対称・上下非対称断面の比率M_p/M_yを求めよ。ただし，M_yは降伏曲げモーメント（図2），M_pは全塑性曲げモーメント（図3）である。降伏応力をYとし，断面の寸法b=5 cm, h=6 cm, t=1 cmを与える。なお，断面全体が塑性になったとき，張力と圧縮力のつり合いが保たれるため，中立軸h_Nは図心軸h_Gと一致しない。

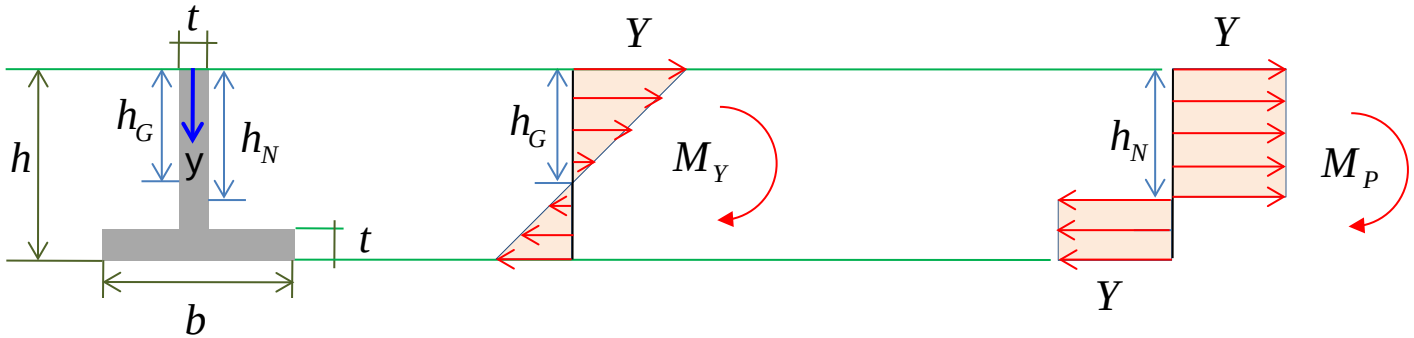


図1：はりの断面　図2：上縁が降伏開始　図3：断面全体が塑性状態

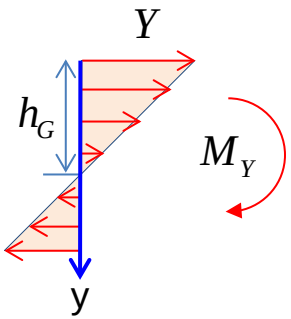
応力分布 $$\frac{\sigma(y)-0}{y-h_G}=\frac{Y-0}{0-h_G}\Rightarrow\sigma(y)=\left(1-\frac{y}{h_G}\right)Y$$

図心軸h_G $$\int_0^{h-t}\sigma(y)tdy+\int_{h-t}^{h}\sigma(y)bdy=0\Rightarrow h_G=4\text{ cm}$$

中立軸h_N $$\int_0^{h_N}Ytdy-\left(\int_{h_N}^{h-t}Ytdy+\int_{h-t}^{h}Ybdy\right)=0\Rightarrow h_N=5\text{ cm}$$

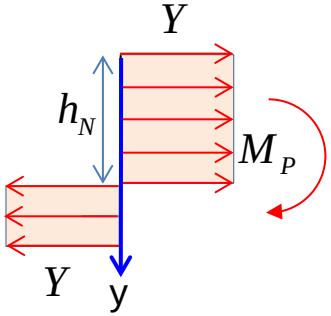
解答

符号については，反時計回りを負の向き，時計回りを正の向きと決める。



降伏曲げモーメント

$$M_y = -\left(\int_0^{h-t} \sigma(y) t y dy + \int_{h-t}^{h} \sigma(y) b y dy \right) = \frac{25}{3} Y$$



全塑性曲げモーメント

$$M_p = -\int_0^{h_N} Y t y dy + \int_{h_N}^{h-t} Y t y dy + \int_{h-t}^{h} Y b y dy = 15Y$$

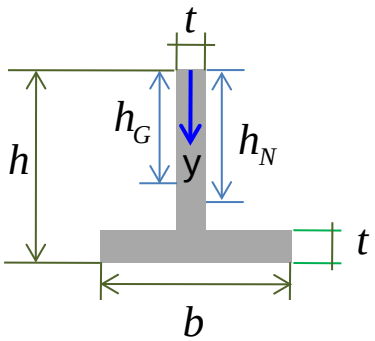
解答：　　比率　$\therefore \dfrac{M_p}{M_y} = \dfrac{9}{5}$

別の解法

図心軸h_G

$$h_G\left(bh - (b-t)(h-t)\right) = bh\frac{h}{2} - (b-t)(h-t)\frac{h-t}{2} \Rightarrow h_G = 4\ \text{cm}$$

$$h_G\left((h-t)t + bt\right) = (h-t)t\frac{h-t}{2} + bt\left(h - \frac{t}{2}\right) \Rightarrow h_G = 4\ \text{cm}$$

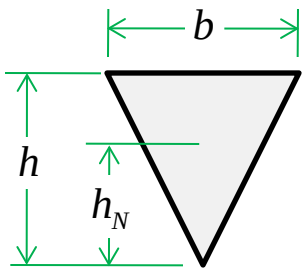


中立軸h_N

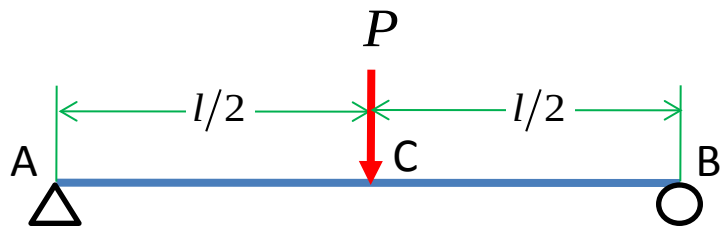
$$h_N t = \frac{bh - (b-t)(h-t)}{2} \Rightarrow h_N = 5\ \text{cm}$$

$$h_N t = (h - t - h_N)t + bt \Rightarrow h_N = 5\ \text{cm}$$

2010年試験問題



図(a)

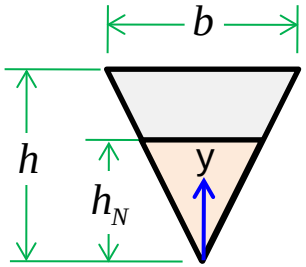


図(b)

図(a)および(b)に示すように，二等辺三角形断面をもつ，長さlの単純ばりがC点において集中荷重 Pを受けている。荷重 を増やすと，C点の曲げモーメントが全塑性曲げモーメントに達し，塑性関節になる。次の設問に答えよ。ただし，降伏応力をYとする。

(1)全塑性曲げモーメントを求めよ。

(2)仮想仕事の原理を用いて，崩壊荷重を求めよ。



解答：　断面積 $A=\dfrac{bh}{2}$　中央軸の位置 $\dfrac{1}{2}b\dfrac{h_N}{h}h_N=\dfrac{A}{2}\Rightarrow h_N=\dfrac{h}{\sqrt{2}}$

(1) 全塑性曲げモーメント $M_p=\int_0^{h_N}-Y\left(b\dfrac{y}{h}\right)ydy+\int_{h_N}^{h}Y\left(b\dfrac{y}{h}\right)ydy=\dfrac{2-\sqrt{2}}{6}bh^2Y$

(2) 崩壊荷重 $P_p\theta\dfrac{l}{2}=2M_p\theta\Rightarrow P_p=\dfrac{4M_p}{l}=\dfrac{2}{3}\dfrac{2-\sqrt{2}}{l}bh^2Y$

宿題の解答

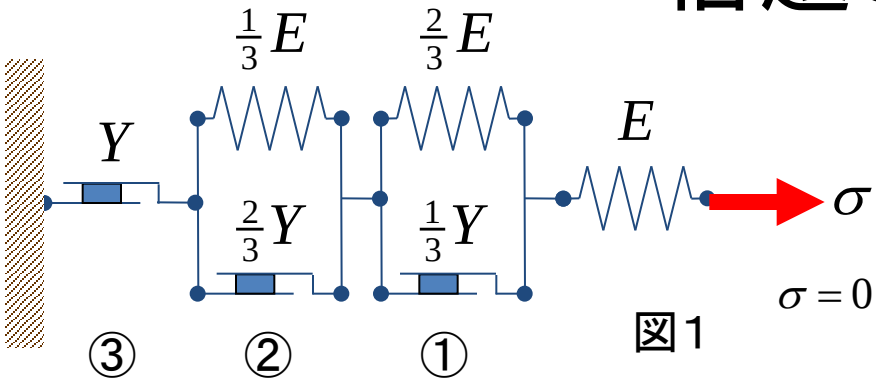


図1

図1に示すようにバネ系が壁に固定されている。図2のように表れる繰返し応力・ひずみ曲線において，各々バネの降伏点（σ, ε）を求めよ。

$$\sigma = 0 \to \frac{Y}{3} \to \frac{2Y}{3} \to Y \to \frac{Y}{3} \to -\frac{Y}{3} \to -Y \to -\frac{Y}{3} \to \frac{Y}{3} \to \frac{2Y}{3}$$

解答

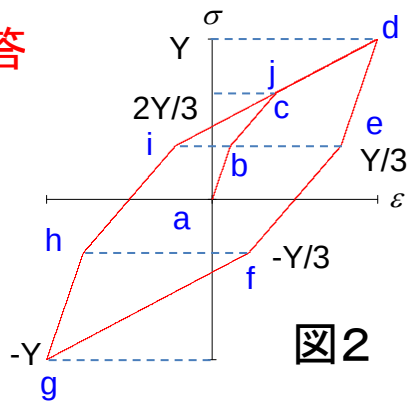


図2

降伏関数　$f(\sigma,\alpha,H,Y) = |\sigma - H\alpha| - Y$　　塑性ひずみ増分　$\Delta\alpha = \dfrac{\Delta\sigma}{H}$

$$\sigma_a = 0, \varepsilon_a^1 = 0, \varepsilon_a^2 = 0, \varepsilon_a^3 = 0, \varepsilon_a = \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_a^i = 0$$

$$\sigma_b = \tfrac{1}{3}Y, \underbrace{f\left(\sigma_b, \varepsilon_a^1, \frac{2}{3}E, \frac{1}{3}Y\right)}_{f_b^1} = 0, \underbrace{f\left(\sigma_b, \varepsilon_a^1, \frac{1}{3}E, \frac{2}{3}Y\right)}_{f_b^2} = -\frac{1}{3}Y$$

$$\varepsilon_b^1 = \varepsilon_a^1 = 0, \varepsilon_b^2 = \varepsilon_a^2 = 0, \varepsilon_b^3 = \frac{\sigma_b}{E}, \varepsilon_b = \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_b^i = \frac{1}{3}\frac{Y}{E}$$

$$\sigma_c = \tfrac{2}{3}Y, f_c^1 = \frac{1}{3}Y, f_c^2 = 0 \qquad \varepsilon_c^1 = \varepsilon_b^1 + \frac{\sigma_c - \sigma_b}{\frac{2}{3}E} = \frac{1}{2}\frac{Y}{E}, \varepsilon_c^2 = \varepsilon_b^2 = 0, \varepsilon_c^3 = \frac{\sigma_c}{E}, \varepsilon_c = \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_c^i = \frac{7}{6}\frac{Y}{E}$$

$$\sigma_d = Y, f_d^1 = \tfrac{1}{3}Y, f_d^2 = \tfrac{1}{3}Y \qquad \varepsilon_d^1 = \varepsilon_c^1 + \frac{\sigma_d - \sigma_c}{\frac{2}{3}E} = \frac{Y}{E}, \varepsilon_d^2 = \varepsilon_c^2 + \frac{\sigma_d - \sigma_c}{\frac{1}{3}E} = \frac{Y}{E}, \varepsilon_d^3 = \frac{\sigma_d}{E} = \frac{Y}{E}, \varepsilon_d = \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_d^i = 3\frac{Y}{E}$$

$$\sigma_e = \tfrac{1}{3}Y, f_e^1 = 0, f_e^2 = -\tfrac{2}{3}Y \qquad \varepsilon_e^1 = \varepsilon_d^1 = \frac{Y}{E}, \varepsilon_e^2 = \varepsilon_d^2 = \frac{Y}{E}, \varepsilon_e^3 = \frac{\sigma_e}{E} = \frac{1}{3}\frac{Y}{E}, \varepsilon_e = \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_e^i = \frac{7}{3}\frac{Y}{E}$$

他の解は省略

$$\sigma_f = -\tfrac{1}{3}Y, f_f^1 = \tfrac{2}{3}Y, f_f^2 = 0 \qquad \varepsilon_f^1 = \varepsilon_e^1 + \frac{\sigma_f - \sigma_e}{\frac{1}{3}E} = 0, \varepsilon_f^2 = \varepsilon_e^2 = \frac{Y}{E}, \varepsilon_f^3 = \frac{\sigma_f}{E} = -\frac{Y}{3E}, \varepsilon_f = \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_f^i = \frac{2}{3}\frac{Y}{E}$$

2011年試験問題

応力状態：σ_{xx}=100 kPa, σ_{yy}=-40 kPa, σ_{zz}=0, $\sigma_{xy}=\sigma_{yx}$=60 kPa, $\sigma_{yz}=\sigma_{zy}$=0, $\sigma_{zx}=\sigma_{xz}$=0 において板材が降伏している。この状態で塑性ひずみ増分$d\varepsilon^p_{xx}$=0.001とすると、ミーゼスの降伏条件および関連流れ則を用いて、塑性ひずみ増分$d\varepsilon^p_{yy}$、$d\varepsilon^p_{zz}$、$d\gamma^p_{xy}$はいくらになるか。なお、ミーゼスの降伏条件および関連流れ則は次のようになる。

ミーゼスの降伏条件：

$$\mathrm{f}=\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l}\left(\sigma_{\mathrm{xx}}-\sigma_{\mathrm{yy}}\right)^2+\left(\sigma_{\mathrm{yy}}-\sigma_{\mathrm{zz}}\right)^2+\left(\sigma_{\mathrm{zz}}-\sigma_{\mathrm{xx}}\right)^2\\+3\left(\sigma_{\mathrm{xy}}{}^2+\sigma_{\mathrm{yz}}{}^2+\sigma_{\mathrm{zx}}{}^2\right)+3\left(\sigma_{\mathrm{yx}}{}^2+\sigma_{\mathrm{zy}}{}^2+\sigma_{\mathrm{xz}}{}^2\right)\end{array}\right\}-\mathrm{Y}^2=0$$

関連流れ則： $\mathrm{d}\varepsilon^{\mathrm{p}}_{\mathrm{ij}}=\mathrm{d}\lambda\dfrac{\partial \mathrm{f}}{\partial\sigma_{\mathrm{ij}}}$

ただし、$d\lambda$は正のスカラー値で、工学せん断ひずみは $\gamma_{ij}=\varepsilon_{ij}+\varepsilon_{ji}$である。

解答：

$$\mathrm{d}\varepsilon^{\mathrm{p}}_{\mathrm{xx}}=\mathrm{d}\lambda\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial\sigma_{\mathrm{xx}}}=\left(\frac{2}{3}\sigma_{\mathrm{xx}}-\frac{1}{3}\sigma_{\mathrm{yy}}-\frac{1}{3}\sigma_{\mathrm{zz}}\right)\mathrm{d}\lambda$$

$$1\times10^{-3}=\left(\frac{2}{3}(100\ \mathrm{kPa})-\frac{1}{3}(-40\ \mathrm{kPa})-\frac{1}{3}(0)\right)\mathrm{d}\lambda$$

$$\mathrm{d}\lambda=\frac{1}{8}\times10^{-4}$$

$$\therefore \mathrm{d}\varepsilon^{\mathrm{p}}_{\mathrm{yy}}=\mathrm{d}\lambda\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial\sigma_{\mathrm{yy}}}=-\frac{3}{4}\times10^{-3}$$

$$\therefore \mathrm{d}\varepsilon^{\mathrm{p}}_{\mathrm{zz}}=\mathrm{d}\lambda\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial\sigma_{\mathrm{zz}}}=-\frac{1}{4}\times10^{-3}$$

$$\therefore \mathrm{d}\gamma^{\mathrm{p}}_{\mathrm{xy}}=\mathrm{d}\lambda\left(\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial\sigma_{\mathrm{xy}}}+\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial\sigma_{\mathrm{yx}}}\right)=\frac{3}{2}\times10^{-3}$$