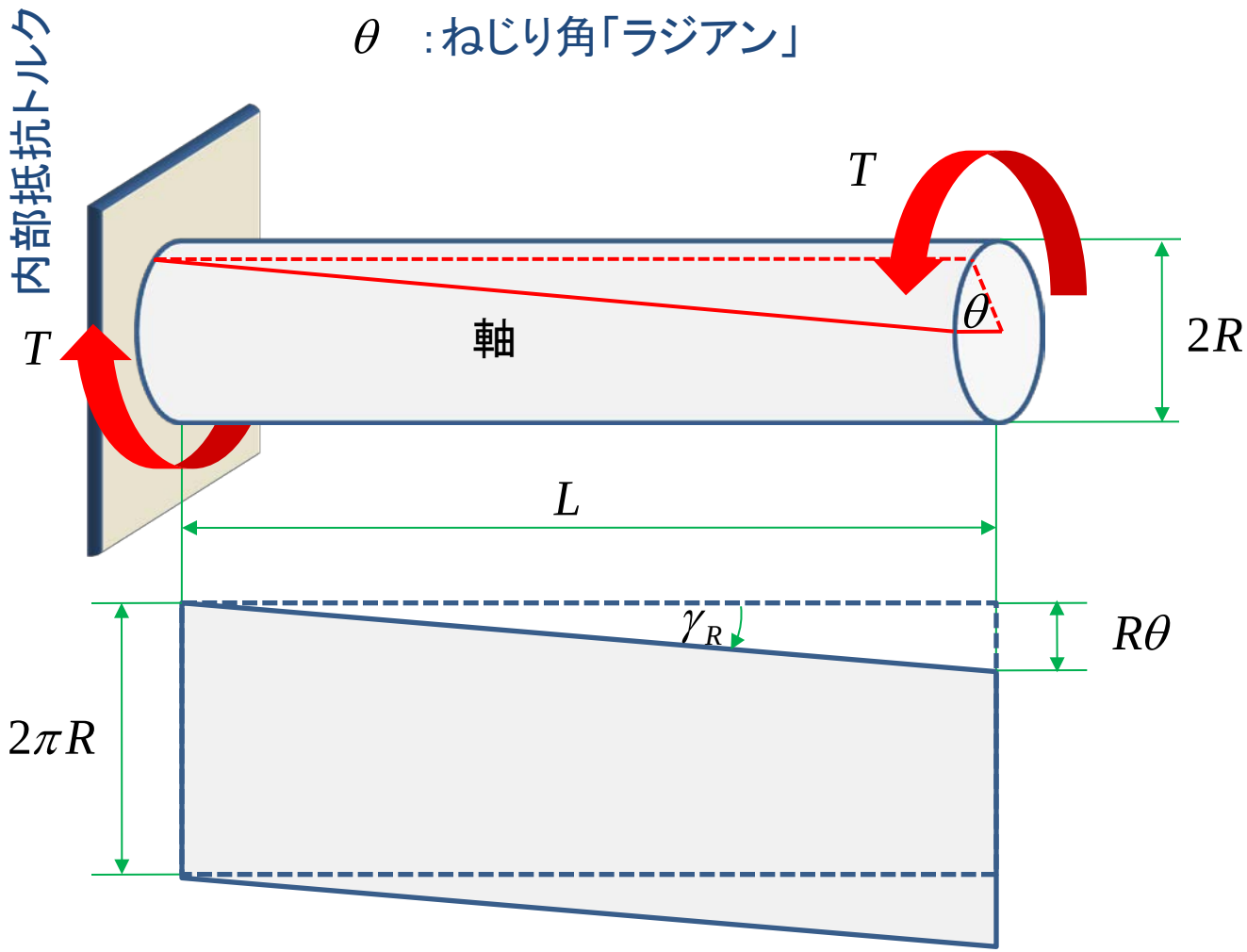
ねじりの弾塑性解析

弾塑性力学

P.ティラポン

第11回 : 2014/7/10

円形断面棒



T ：ねじりモーメント（トルク）

外周のせん断ひずみ

$$\gamma_R \approx \tan\gamma_R = \frac{R}{L}\theta$$

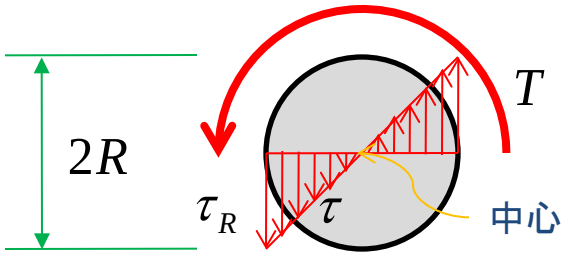
外周のせん断応力

$$\tau_R = G\gamma_R$$

G ：せん断弾性係数

中実丸軸

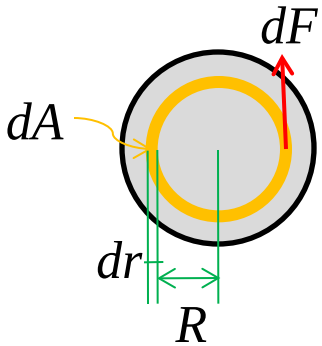
せん断応力の分布



ねじりせん断応力 $\tau = \dfrac{r}{R}\tau_R$

要素上の面積 $dA = 2\pi r dr$

要素上のせん断応力 $dF = \tau dA$



断面二次極モーメント $J = \int_A r^2 dA = \int_0^R 2\pi r^3 dr = \dfrac{\pi}{2}R^4$

中心回りのモーメント $T = \int_A r dF = 2\pi \int_0^R \tau_R \dfrac{r}{R} r^2 dr = \dfrac{\pi R^3}{2}\tau_R = \dfrac{J\tau_R}{R}$

$\because \gamma_R = R\dfrac{\theta}{L}$

外表面のせん断応力 $\boxed{\tau_R = \dfrac{TR}{J}}$

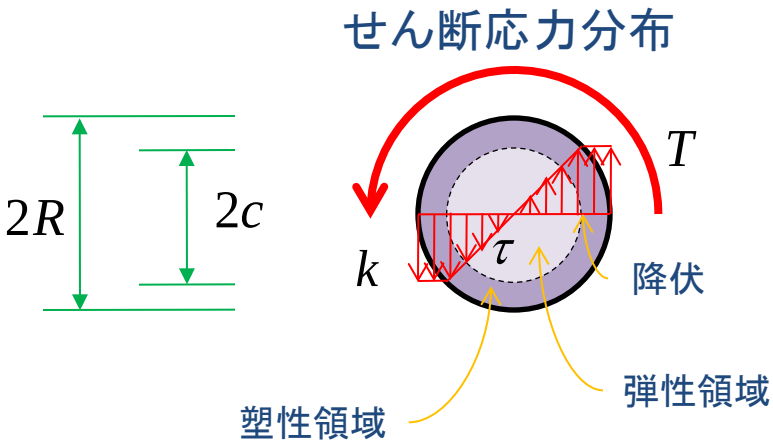
ねじり角 $\boxed{\theta = \dfrac{L}{R}\gamma_R = \dfrac{L}{R}\dfrac{\tau_R}{G} = \dfrac{TL}{GJ}}$

外表面のせん断ひずみ $\boxed{\gamma_R = \dfrac{\tau_R}{G} = \dfrac{TR}{GJ}}$

GJ ：ねじり剛性　　G ：せん断弾性係数

棒の塑性ねじり

変形が進むと，外周が降伏し始める。完全塑性体を考えれば，せん断降伏応力を kで表わせる。



弾性域　$c > r > 0$　　$\tau = \dfrac{r}{c}k$

塑性域　$R > r > c$　　$\tau = k$

弾完全塑性体の丸棒のねじりモーメント＝弾性域の受け持つトルク + 弾性域の受け持つトルク

$$T_{ep} = 2\pi\left(\underbrace{\int_0^c k\frac{r}{c}r^2dr}_{\text{弾性域}} + \underbrace{\int_c^R kr^2dr}_{\text{塑性域}}\right) = \frac{2}{3}\pi R^3 k\left(1-\frac{1}{4}\left(\frac{c}{R}\right)^3\right)$$

弾性限のねじりモーメント
$(c = R)$

$$T_y = \frac{1}{2}\pi R^3 k$$

全塑性ねじりモーメント
$(c = 0)$

$$T_u = \frac{2}{3}\pi R^3 k$$

$$\Rightarrow \quad \frac{T_u}{T_y} = \frac{4}{3}$$

トルク Tとねじり角 θ の関係

弾性のトルク

比ねじり角は断面で均一であるので，弾性域および塑性域から計算できる $\because \theta = \frac{L}{R}\frac{\tau_R}{G}$

$$T_e(\theta) = GJ\frac{\theta}{L} \qquad \because \tau_R = \frac{TR}{J}, \theta = \frac{L}{R}\frac{\tau_R}{G}, J = \frac{\pi}{2}R^4$$

弾完全塑性のトルク

$$T_{ep}(\theta) = \frac{2}{3}\pi R^3 k\left(1-\frac{1}{4}\left(\frac{c}{R}\right)^3\right) = \frac{2}{3}\pi R^3 k\left(1-\frac{1}{4}\left(\frac{\theta_y}{\theta}\right)^3\right)$$

$$T(\theta) = \begin{cases} T_e(\theta) & \text{if } \theta < \theta_y \\ T_{ep}(\theta) & \text{otherwise} \end{cases}$$

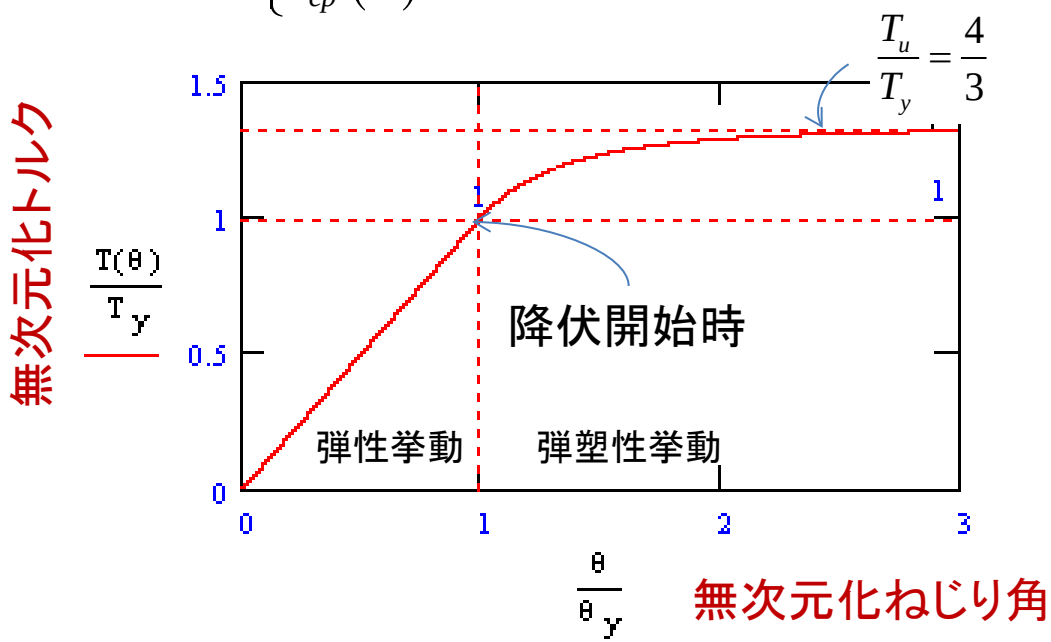
弾性域により

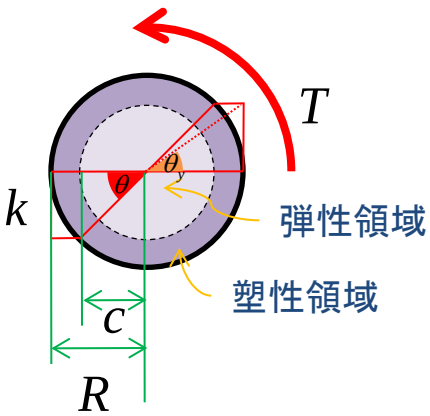
$$\theta = \frac{Lk}{cG}$$

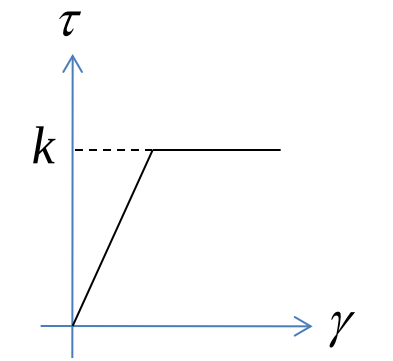
降伏開始により

$$\theta_y = \frac{Lk}{RG}$$

$$\therefore \frac{c}{R} = \frac{\theta_y}{\theta}$$



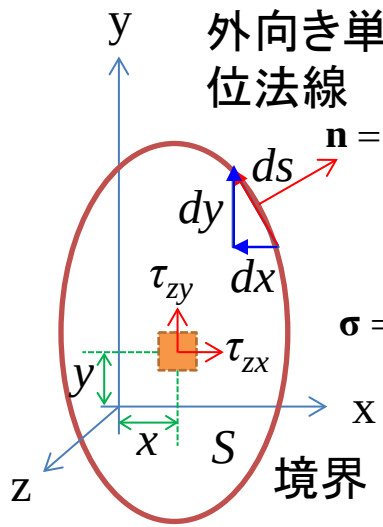




完塑性材のせん断応力・ひずみ関係

$$T_y = T_e(\theta_y) = T_{ep}(\theta_y) = \frac{1}{2}\pi R^3 k$$

ねじり応力関数



$$\mathbf{n}=\begin{Bmatrix} dy/ds \\ -dx/ds \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\sigma}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & 0 \end{bmatrix}$$

ねじりせん断応力のみを考慮すると $\sigma_z=\sigma_x=\sigma_y=0, \tau_{xy}=0$

z軸方向のつり合い式 $\dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}=0, \tau_{xz}=\tau_{zx}, \tau_{yz}=\tau_{zy}$

ねじり応力関数$\Psi(x,y)$ $\tau_{zx}=\dfrac{\partial \Psi}{\partial y}, \tau_{zy}=-\dfrac{\partial \Psi}{\partial x}$

ベェルトラミー・ミッチェルの適合条件方程式 $\nabla^2\tau_{zx}=0, \nabla^2\tau_{zy}=0$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2\Psi=0, \frac{\partial}{\partial x}\nabla^2\Psi=0$$

$$\Downarrow$$

$$d\nabla^2\Psi=0 \Rightarrow \nabla^2\Psi=c$$

Ψがポアソンの方程式を満たす

s境界上の表面力

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_{zx}dy/ds-\tau_{zy}\,dx/ds \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\because \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{dx}{ds}\right)\Bigg|_s=0 \Rightarrow \frac{d\Psi}{ds}\Bigg|_s=0$$

簡単のために $\Psi|_s=0$

棒内のせん断応力 $\tau=\sqrt{\tau_{zx}{}^2+\tau_{zy}{}^2}$

降伏せん断応力 $\tau_u=k$ $\quad \therefore \left(\dfrac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2=k^2$

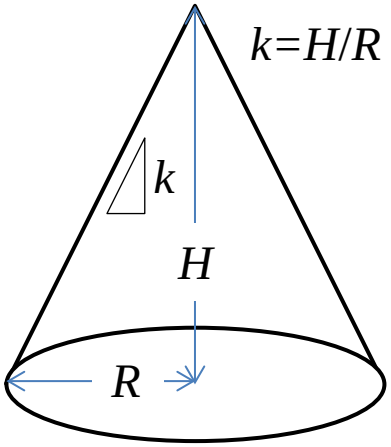
z軸回りのねじりモーメント

$$T=\int_S\left(x\tau_{zy}-y\tau_{zx}\right)dS=-\int_S\left(x\frac{\partial \Psi}{\partial x}+y\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)dS$$

$$=-\int_S\left(\frac{\partial(x\Psi)}{\partial x}+\frac{\partial(y\Psi)}{\partial y}\right)dS+2\int_S\Psi dS$$

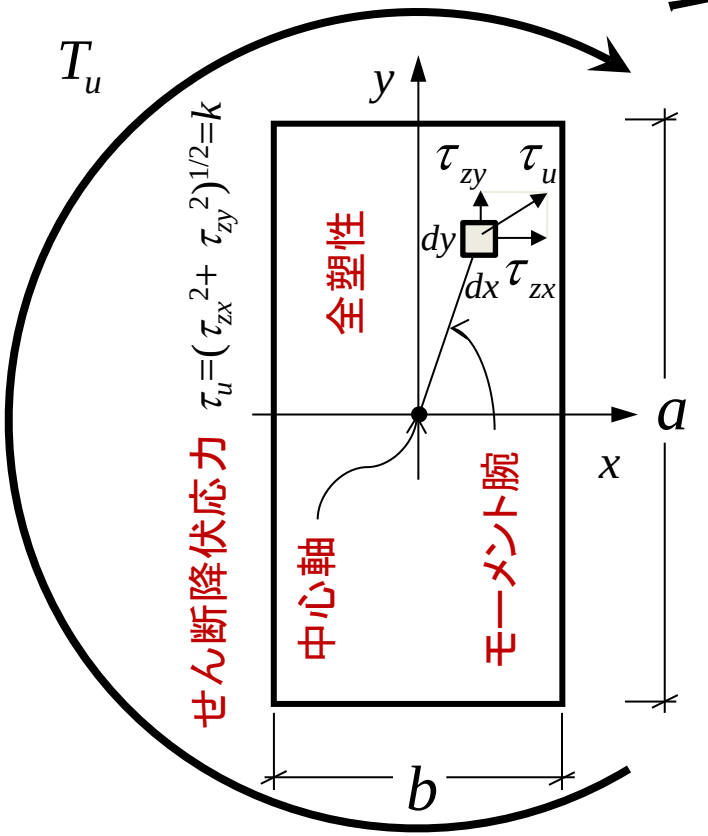
$$=-\oint_s\begin{Bmatrix} x\Psi \\ y\Psi \end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} dy/ds \\ -dx/ds \end{Bmatrix}ds+2\oint_S\Psi dS$$

$$=-\oint_s\Psi\left(xdy-ydx\right)+2\oint_S\Psi dS=2\oint_S\Psi dS$$



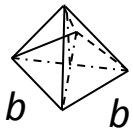
円断面棒の円錐砂丘 $V=\dfrac{1}{3}\pi R^3 k$

長方形断面棒



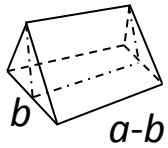
ナダイの砂丘類似

三角形立体の体積

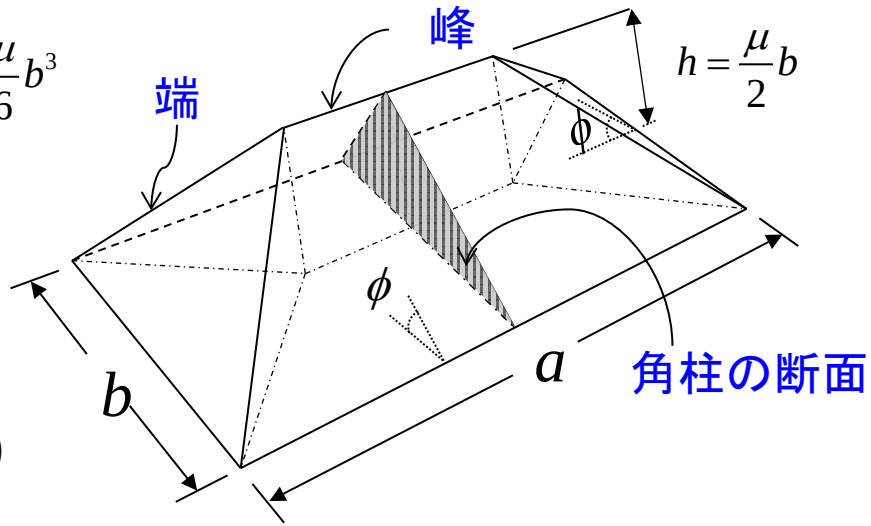


$$V_1=\frac{\mu}{6}b^3$$

角柱の体積

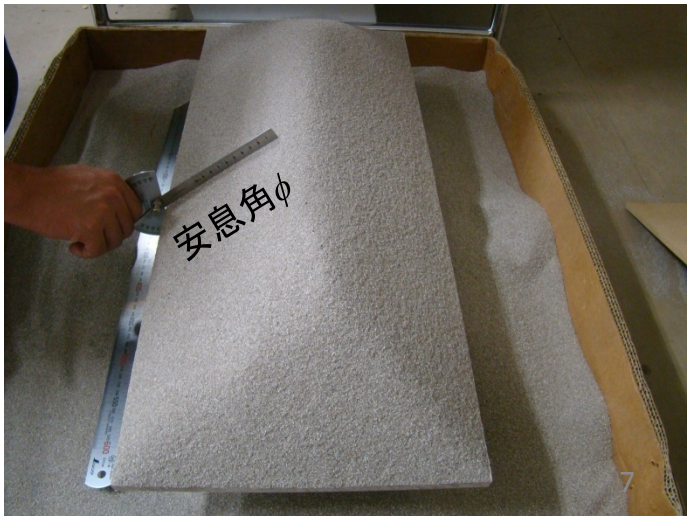


$$V_2=\frac{\mu}{4}b^2(a-b)$$



砂丘の体積 $V=V_1+V_2=\frac{\mu}{12}b^2(3a-b)$ 但し $\mu=\tan\phi$

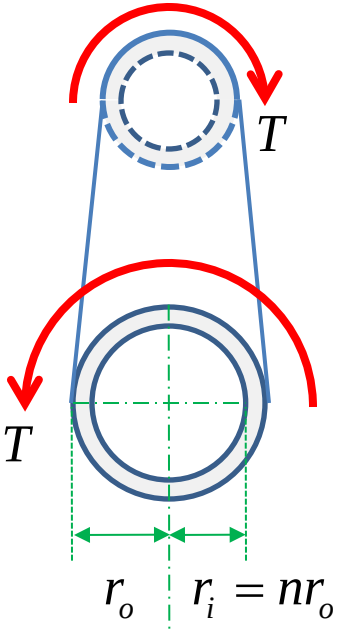
関数Ψの形は砂丘によって表現できるので，全塑性ねじりモーメントT_uは砂丘の体積の2倍とすればよい（ナダイの砂丘類似）



全塑性ねじりモーメント

$$T_u=\int_x\int_y\left(x\tau_{zy}-y\tau_{zx}\right)dxdy=\frac{k}{6}b^2(3a-b)$$

宿題（2009年試験問題）



図で示す外半径r_o，内半径r_iの弾完全塑性管材を考える。両端にねじりモーメントTが作用すると，せん断応力を生じる。r_oとr_iの比$n= r_i/r_o$を用いて，次の設問に答えよ。ただし，せん断降伏応力をkとする。

（1）弾性限ねじりモーメントを求めよ。

（2）全塑性ねじりモーメントを求めよ。