降伏条件

弾塑性力学

P.ティラポン

第13回：2014/7/22

7月31日（木） 期末試験（15：05～16：35） S224

最大せん断ひずみエネルギー説

等方・均質な線形弾性材料の応力ーひずみ関係式

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_2 + \sigma_2)\\ \varepsilon_2 &= \frac{\sigma_2}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_3 + \sigma_1)\\ \varepsilon_3 &= \frac{\sigma_3}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2)\end{aligned}\right\}\text{主応力・主ひずみ空間}$$

単位体積あたりのひずみエネルギー

$$U = \frac{1}{2}(\sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2 + \sigma_3\varepsilon_3)$$

平均応力によるひずみエネルギー成分

$$U_p = \frac{1}{2}\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = \frac{1-2\nu}{6E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$

従って，せん断によるエネルギー成分

$$U_s = U - U_p = \frac{1+\nu}{6E}\left((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right)$$

単純引張り状態における降伏応力

$$\sigma_1 = Y, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = 0$$

そのときのせん断によるエネルギー

$$\bar{U}_s = \frac{1+\nu}{3E}Y^2$$

ミーゼスの条件におけるエネルギー限界値

$$U_s \le \bar{U}_s$$

$$\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2} \le Y^2$$

$$\bar{\sigma} \le Y$$

相当応力の定義

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}}$$

相当応力・相当ひずみ増分

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + \left(\sigma_y - \sigma_z\right)^2 + \left(\sigma_z - \sigma_x\right)^2 + 6\left(\tau_{xy}{}^2 + \tau_{yz}{}^2 + \tau_{zx}{}^2\right)\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_3 - \sigma_1\right)^2}{2}}$$

$\sigma_2 = \sigma_3$ 軸対称 $\bar{\sigma} = \sigma_1 - \sigma_3$

$\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ 単軸状態 $\bar{\sigma} = \sigma_1$

$$d\bar{\varepsilon}^p = \sqrt{\frac{2}{9}\left(\begin{array}{l}\left(d\varepsilon_x^p - d\varepsilon_y^p\right)^2 + \left(d\varepsilon_y^p - d\varepsilon_z^p\right)^2 + \left(d\varepsilon_z^p - d\varepsilon_x^p\right)^2 \\ + \frac{3}{2}\left(d\gamma_{xy}^{p\,2} + d\gamma_{yz}^{p\,2} + d\gamma_{xz}^{p\,2}\right)\end{array}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{9}\left(\left(d\varepsilon_1^p - d\varepsilon_2^p\right)^2 + \left(d\varepsilon_2^p - d\varepsilon_3^p\right)^2 + \left(d\varepsilon_3^p - d\varepsilon_1^p\right)^2\right)}$$

$d\varepsilon_2^p = d\varepsilon_3^p$ 軸対称 $d\bar{\varepsilon}^p = \frac{2}{3}\left(d\varepsilon_1^p - d\varepsilon_3^p\right)$

体積塑性ひずみ増分の和はゼロ

$$\because d\varepsilon_1^p + d\varepsilon_2^p + d\varepsilon_3^p = 0$$

単軸状態 $d\varepsilon_2^p = d\varepsilon_3^p = -\frac{1}{2}d\varepsilon_1^p$

$$d\bar{\varepsilon}^p = d\varepsilon_1^p$$

$dW^p = \bar{\sigma}d\bar{\varepsilon}^p$ 塑性仕事増分

降伏条件の具体形（金属材料）

- トレスカ（Tresca, 1864）: 最大せん断応力説

$$f = (\sigma_1 - \sigma_3) - Y = 0$$

- ミーゼス(von Mises, 1913): 最大せん断ひずみエネルギー説

$$\sigma_2 = \sigma_3$$

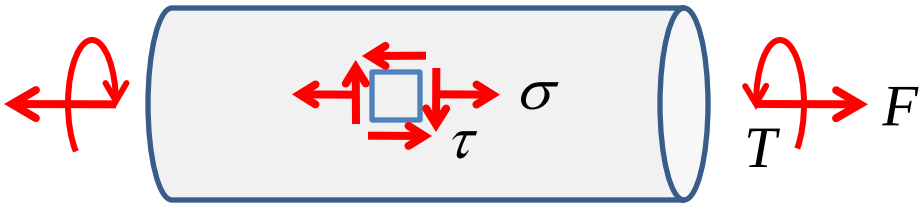
両者が同じ

$$f = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}} - Y$$

ただし，$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$：主応力，Y：材料の降伏応力（一次元相当するもの）

練習題（ 2012年試験問題）
トレスカ降伏関数およびミーゼス降伏関数に関連流れ則を用いて，それぞれ塑性体積ひずみ増分（$d\varepsilon^p{}_v = d\varepsilon^p{}_1 + d\varepsilon^p{}_2 + d\varepsilon^p{}_3$）を算出せよ。ただし，$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$は主応力，$Y$は材料の降伏応力とする。

引張・ねじりを受ける薄肉円筒



σ:軸応力，τ:せん断応力，Y:降伏応力

2次元の応力マトリックス

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

マトリックス個有値

$$\det(\boldsymbol{\sigma} - \lambda \mathbf{1}) = 0$$

$$\lambda\left(-\lambda^2 + \sigma\lambda + \tau^2\right) = 0$$

$$\therefore \lambda = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}, 0, \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

ミーゼスの降伏条件 $f = \bar{\sigma} - Y = 0$

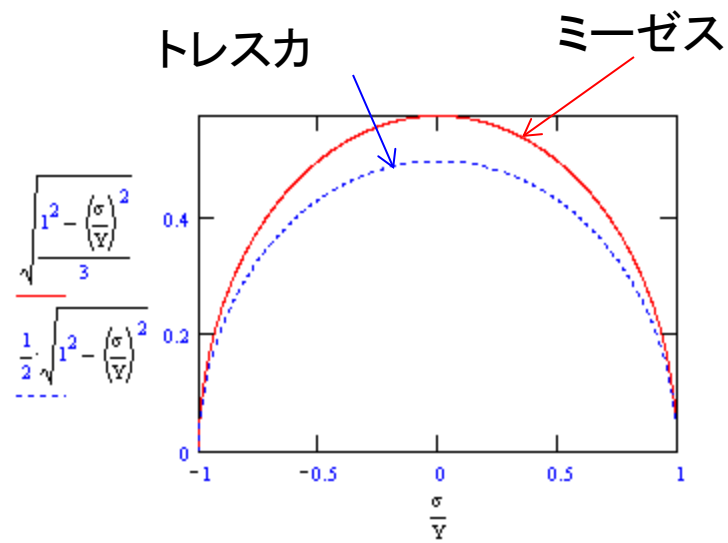
$$\sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}} - Y = 0$$

$$\sigma^2 + 3\tau^2 = Y^2 \Rightarrow \frac{\tau}{Y} = \sqrt{\frac{1 - (\sigma/Y)^2}{3}}$$

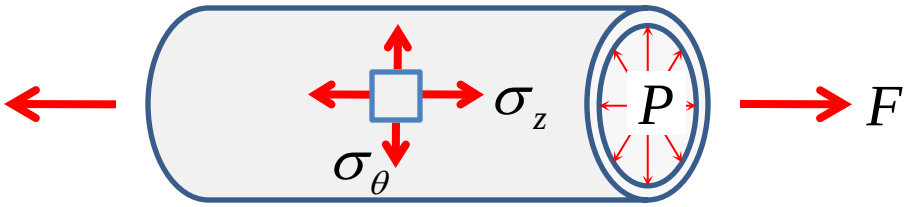
トレスカの降伏条件

$$(\sigma_1 - \sigma_3) - Y = 0$$

$$\sigma^2 + 4\tau^2 = Y^2 \Rightarrow \frac{\tau}{Y} = \sqrt{\frac{1 - (\sigma/Y)^2}{4}}$$



引張・内圧を受ける薄肉円筒



σ:軸応力，τ:せん断応力，Y:降伏応力

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_z & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

トレスカの降伏条件

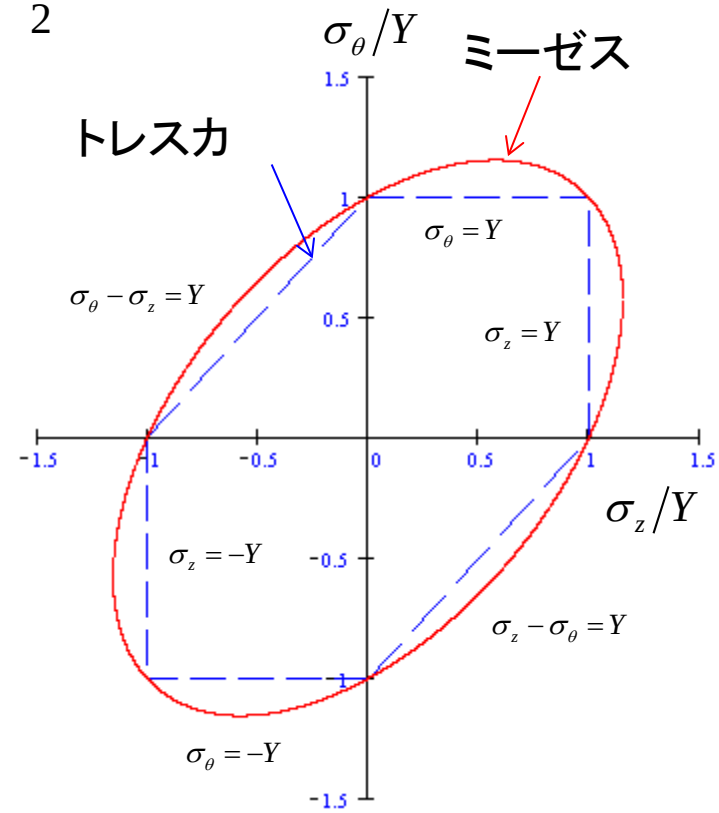
$$(\sigma_1 - \sigma_3) - Y = 0$$

$\sigma_z > \sigma_\theta > 0$	$\sigma_\theta > \sigma_z > 0$	$\sigma_\theta > 0 > \sigma_z$
$\sigma_1 = \sigma_z$ $\sigma_2 = \sigma_\theta$ $\sigma_3 = 0$	$\sigma_1 = \sigma_\theta$ $\sigma_2 = \sigma_z$ $\sigma_3 = 0$	$\sigma_1 = \sigma_\theta$ $\sigma_2 = 0$ $\sigma_3 = \sigma_z$
$\sigma_z = Y$	$\sigma_\theta = Y$	$\sigma_\theta - \sigma_z = Y$
$0 > \sigma_\theta > \sigma_z$	$0 > \sigma_z > \sigma_\theta$	$\sigma_z > 0 > \sigma_\theta$
$\sigma_1 = 0$ $\sigma_2 = \sigma_\theta$ $\sigma_3 = \sigma_z$	$\sigma_1 = 0$ $\sigma_2 = \sigma_z$ $\sigma_3 = \sigma_\theta$	$\sigma_1 = \sigma_z$ $\sigma_2 = 0$ $\sigma_3 = \sigma_\theta$
$\sigma_z = -Y$	$\sigma_\theta = -Y$	$\sigma_z - \sigma_\theta = Y$

ミーゼスの降伏条件

$$\sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}} - Y = 0$$

$$\frac{(\sigma_z - \sigma_\theta)^2 + \sigma_\theta^{\,2} + \sigma_z^{\,2}}{2} = Y^2$$



関連流れ則・硬化則

最大塑性仕事の原理（Drucker, 1951）

$$d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^{p} \geq 0$$

降伏局面の凸面性　$f(\sigma_{ij}) = f(\sigma_{ij}^{*}) = 0$

$$\left(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{*}\right) d\varepsilon_{ij}^{p} \geq 0$$

$\left(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{*}\right)$ と $d\varepsilon_{ij}^{p}$ のなす角が鈍角とならない

塑性ひずみ増分の直交則

$$d\varepsilon_{ij}^{p} \perp f(\sigma_{ij})$$

関連流れ則

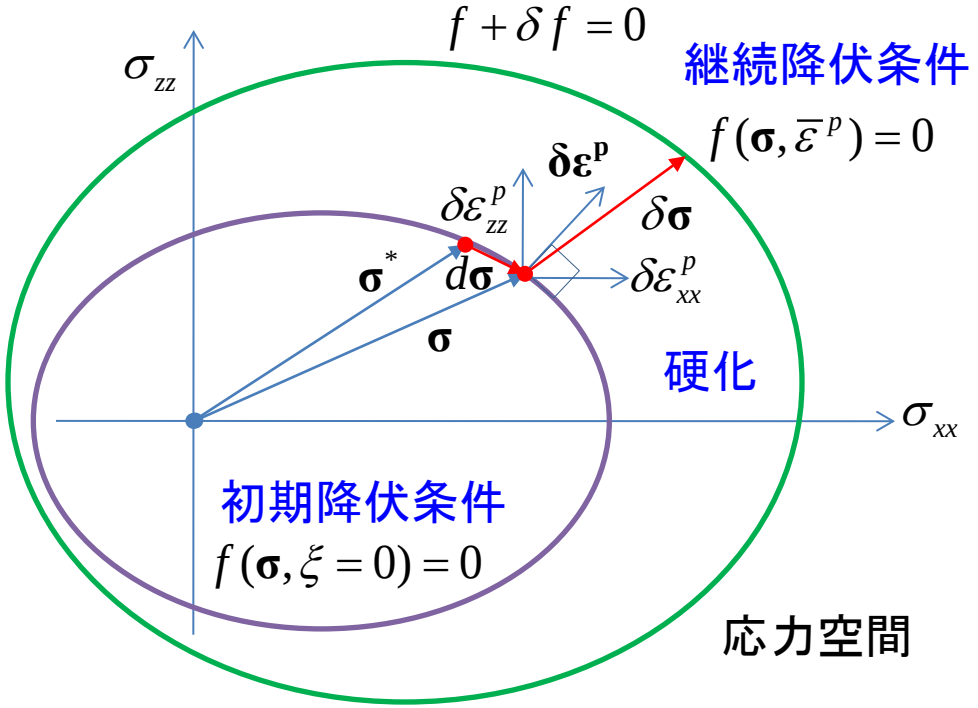
$$d\varepsilon_{ij}^{p} = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$$

降伏関数

塑性ひずみ増分

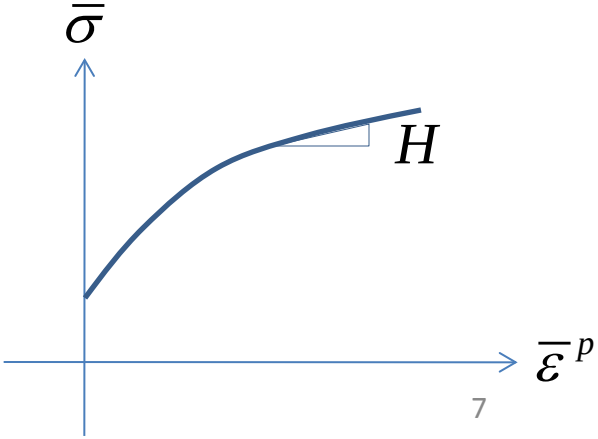
正のスカラー値

応力成分



硬化係数（塑性接線係数）

$$H = \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}^{p}}$$



宿題(2013年試験問題)

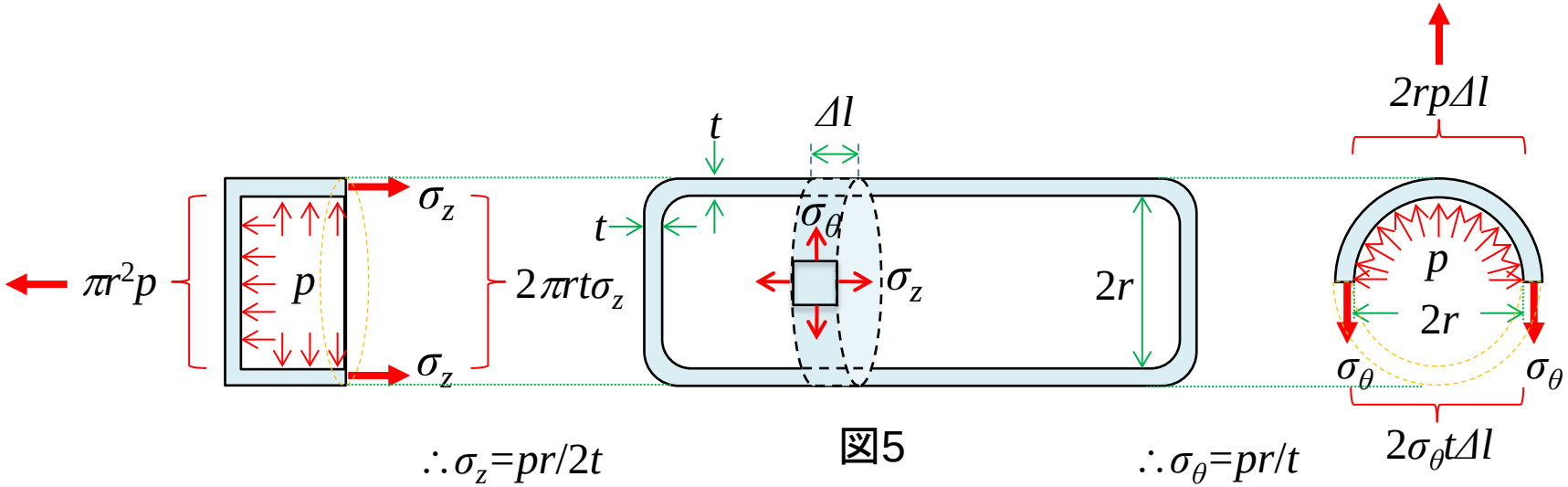


図5

図5に示す内圧 p を受ける薄肉円筒型圧容器（厚さt，半径r）では，円周方向応力 $\sigma_\theta = pr/t$，軸方向応力 $\sigma_z = pr/2t$，半径方向応力 $\sigma_r = 0$ が生じる。圧力容器の降伏応力を Y とし，トレスカの降伏条件に伴うものとして，この容器が降伏する限界の内圧 p を求めよ。