直線硬化弾塑性

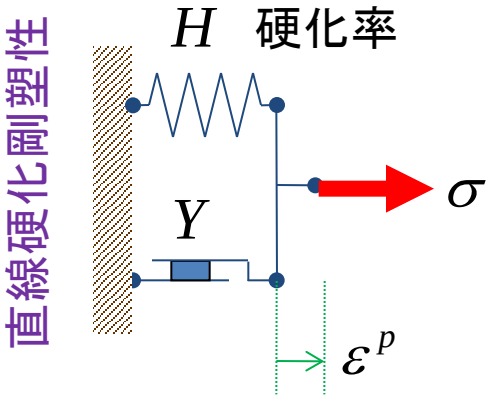
弾塑性力学

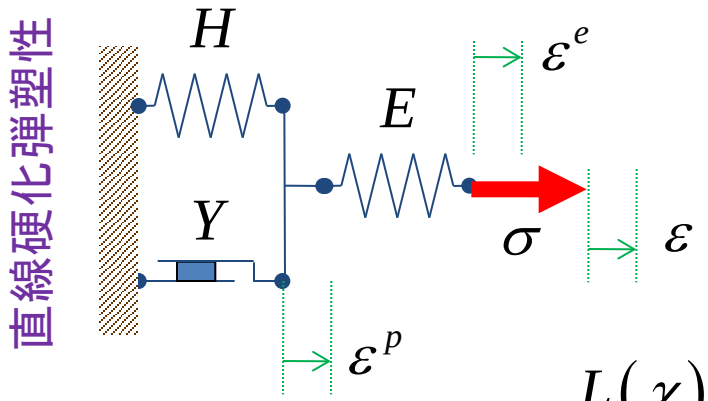
P.ティラポン

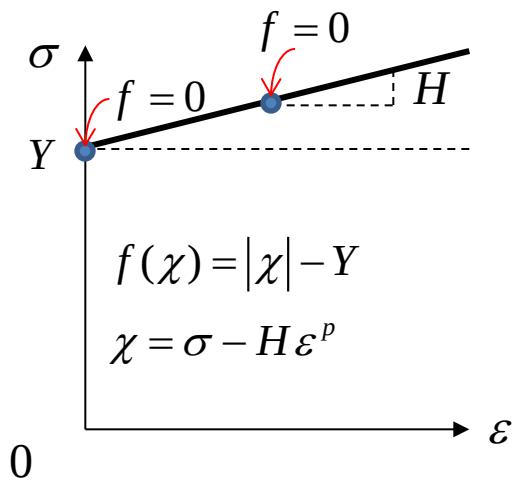
第12回：2014/7/15

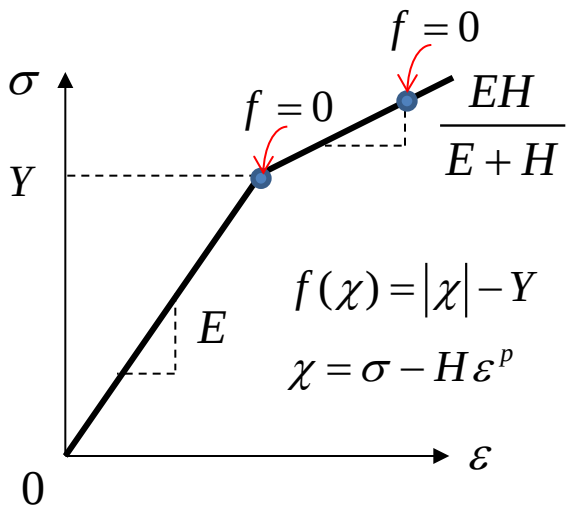
7月31日（木） 期末試験（15：05～16：35） S224

直線硬化塑性材









塑性仕事（目的関数）

$$W^p(\chi) = \chi \Delta\varepsilon^p > 0$$

降伏関数（制約条件）

$$f(\chi) = 0$$

ラグランジュ未定乗数法

$$L(\chi) = -W^p(\chi) + \Delta\gamma f(\chi)$$

ラグランジュ乗数を$\Delta\gamma$とする

最大塑性仕事の原理（最適化）

$$\frac{\partial L(\chi)}{\partial \chi} = 0 = -\Delta\varepsilon^p + \Delta\gamma \frac{\partial f}{\partial \chi}$$

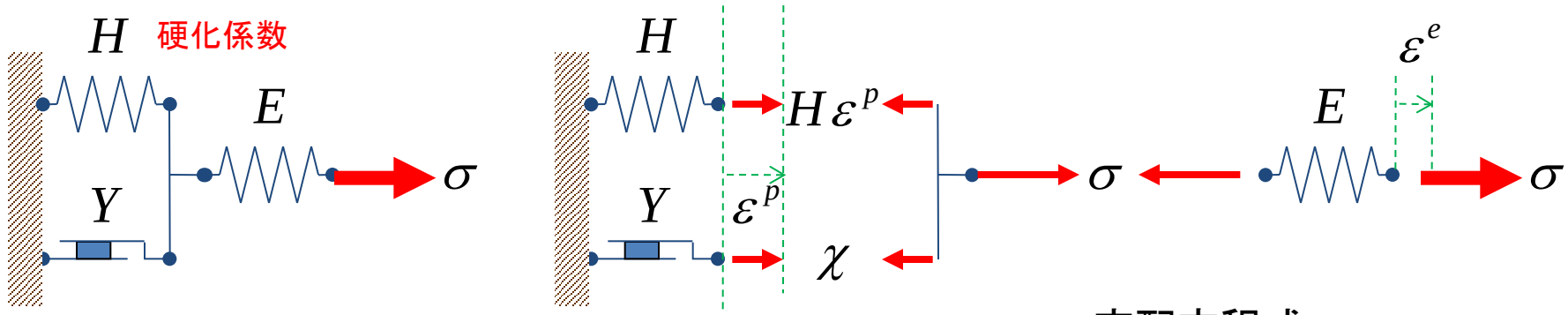
関連流れ則 $\Delta\varepsilon^p = \Delta\gamma \dfrac{\partial f}{\partial \chi}$

応力点χが引き続元の降伏曲面上の他の応力点χ+Δχに移る場合は中立負荷（適応条件を満たす）という

$$f(\chi) = 0 \Rightarrow f(\chi + \Delta\chi) = 0 \Rightarrow f(\chi + \Delta\chi) = f(\chi) + \frac{\partial f}{\partial \chi}\Delta\chi = 0 \Rightarrow \Delta\chi = 0$$

直線硬化弾塑性モデル

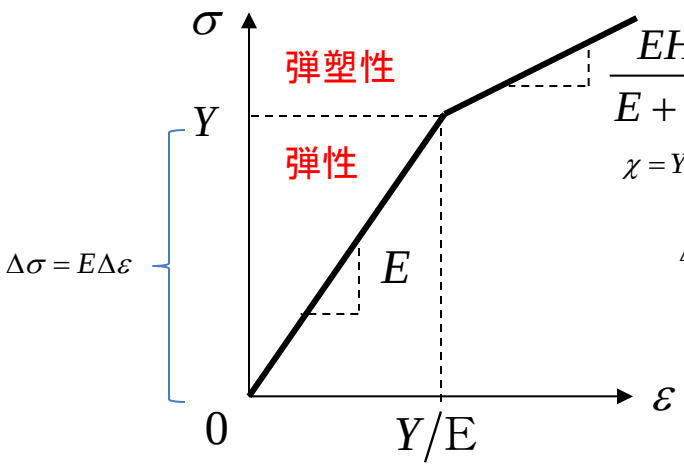
直線硬化弾塑性



負荷・除荷の判別

$f(\chi+\Delta\chi)<0$ 除荷

$f(\chi+\Delta\chi)=0$ 負荷



$\chi = Y \rightarrow \Delta\chi = 0$

$$\Delta\sigma = \Delta\chi + H\Delta\varepsilon^p = H(\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon^e) = H(\Delta\varepsilon - \Delta\sigma/E) = \frac{EH}{E+H}\Delta\varepsilon$$

$$\Delta\sigma = \begin{cases} E\Delta\varepsilon & :\text{弾性} \\ \dfrac{EH}{E+H}\Delta\varepsilon & :\text{弾塑性} \end{cases}$$

支配方程式

降伏関数 $f(\chi) = |\chi| - Y \le 0$

弾性構成式 $\Delta\sigma = E\Delta\varepsilon^e$

つり合い式 $\sigma = \chi + H\varepsilon^p$

全ひずみ $\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$

関連流れ則 $\Delta\varepsilon^p = \begin{cases} \Delta\gamma \dfrac{df}{d\chi} & \text{if} \quad f=0 \\ 0 & \text{if} \quad f<0 \end{cases}$

$(\Delta\gamma > 0)$

適応条件 $\Delta f = \dfrac{df}{d\chi}\Delta\chi = 0 \quad \text{if } f = 0$

応力制御の解法（応力増分が既定値）

はじめに降伏のとき　$f=0, \varepsilon^p=0 \quad \therefore \chi=\sigma=Y$　（張力を与える）

関連流れ則により $\Delta\varepsilon^p=\Delta\gamma\dfrac{df}{d\chi}=\Delta\gamma\, sign(\chi)=\Delta\gamma \quad \because \dfrac{df}{d\chi}=\dfrac{\chi}{|\chi|}=sign(\chi)$

f=0場合，適応条件により $\Delta\chi=0 \quad \because sign(\chi)=sign(Y)=1$

つり合い式によって，応力増分は　$\Delta\sigma=\Delta\chi+H\Delta\varepsilon^p=H\Delta\varepsilon^p$

適応条件および関連流れ則を応力増分に代入して，塑性乗数$\Delta\gamma$が求められる

$$\Delta\gamma=\frac{\Delta\sigma}{H}$$

Δσによる負荷・除荷判定

関連流れ則

$(\Delta\gamma>0)$

$\Delta\varepsilon^p=\Delta\gamma$

全ひずみの増分

$\Delta\varepsilon=\Delta\varepsilon^e+\Delta\varepsilon^p$

弾性構成式の増分

$\Delta\varepsilon^e=\Delta\sigma/E$

負荷：$\Delta\gamma>0$ ⇒ $\Delta\varepsilon^p=\dfrac{\Delta\sigma}{H}$ ⇒

除荷：$\Delta\gamma\le 0$ ⇒ $\Delta\varepsilon^p=0$ ⇒

結論

$$\Delta\varepsilon=\frac{\Delta\sigma}{E}+\frac{\Delta\sigma}{H}=\frac{E+H}{EH}\Delta\sigma$$

$$\Delta\varepsilon=\frac{\Delta\sigma}{E}+0=\frac{\Delta\sigma}{E}$$

ひずみ制御の解法（ひずみ増分が既定値）

はじめに降伏のとき　$f=0, \varepsilon^p=0$　　$\therefore \chi=\sigma=Y$（張力を与える）

関連流れ則により $\Delta\varepsilon^p=\Delta\gamma\dfrac{df}{d\chi}=\Delta\gamma sign(\chi)=\Delta\gamma$

f=0場合，適応条件により $\Delta\chi=0$　　$\because sign(\chi)=sign(Y)=1$

適応条件をつり合い式に代入し，応力増分形を書くと　$\Delta\sigma=H\Delta\varepsilon^p$

全ひずみを弾性構成式に代入し，応力増分形を書くと　$\Delta\sigma=E\left(\Delta\varepsilon-\Delta\varepsilon^p\right)$

上記の二つ応力増分形と関連流れ則から，塑性乗数$\Delta\gamma$が求められる

$$\Delta\gamma=\frac{E}{E+H}\Delta\varepsilon$$

$\Delta\varepsilon$による負荷・除荷判定

関連流れ則

$(\Delta\gamma>0)$

$\Delta\varepsilon^p=\Delta\gamma$

応力増分形

$$\Delta\sigma=E\left(\Delta\varepsilon-\Delta\varepsilon^p\right)$$

負荷：$\Delta\gamma>0$ ⇒ $\Delta\varepsilon^p=\dfrac{E\Delta\varepsilon}{E+H}$ ⇒

除荷：$\Delta\gamma\le 0$ ⇒ $\Delta\varepsilon^p=0$ ⇒

結論

$$\Delta\sigma=\frac{EH}{E+H}\Delta\varepsilon$$

$$\Delta\sigma=E\Delta\varepsilon$$

練習問題

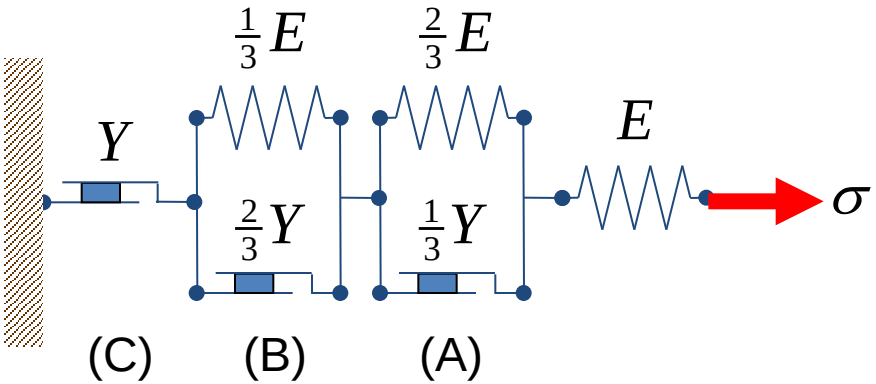


図1：バネ系

図1に示すようにバネ系が壁に固定されている。もう一方の端点に水平方向の応力 σ を加え，ひずみ ε を伸びる。σ 徐々に大きくすると，それぞれバネが次々に降伏する。その σ と ε との関係が図2のように表れる。各々バネの弾性係数および降伏応力を用いてσ_1, σ_2, σ_3 および ε_1, ε_2, ε_3を求めよ。

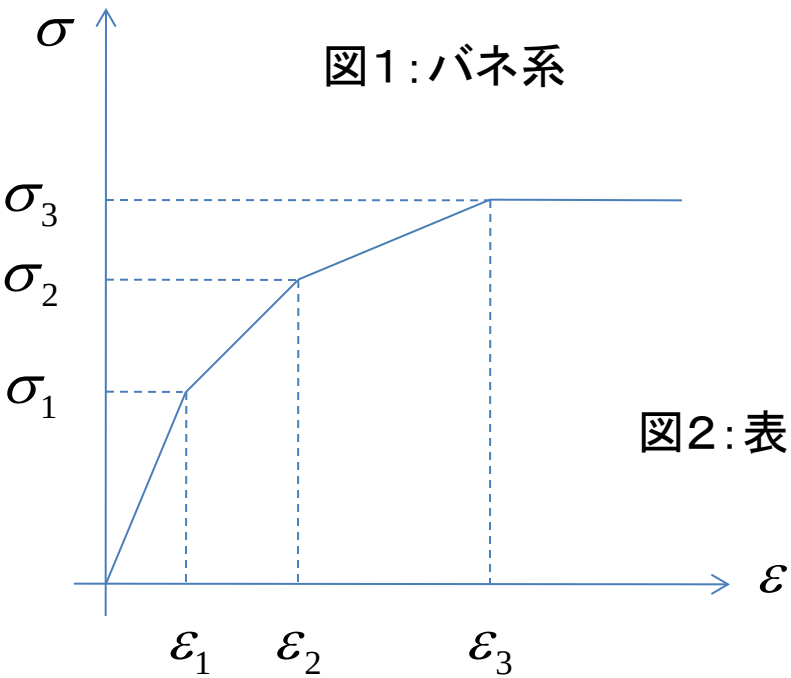


図2：表れる応力・ひずみ関係

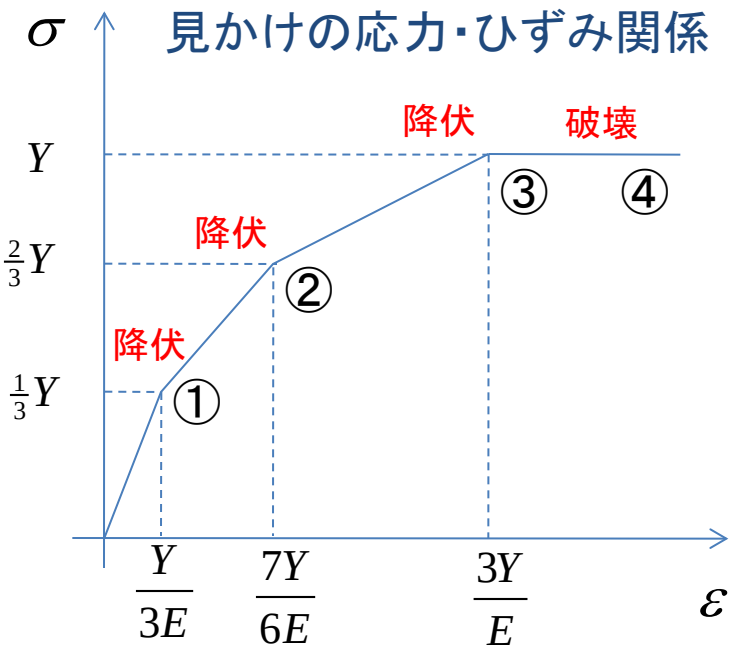
解答

$$\sigma_1 = \frac{Y}{3} \qquad \varepsilon_1 = \frac{Y}{3E}$$

$$\sigma_2 = \frac{2Y}{3} \qquad \varepsilon_2 = \frac{7Y}{6E}$$

$$\sigma_3 = Y \qquad \varepsilon_3 = \frac{3Y}{E}$$

解法



① $\varepsilon^e = Y/3E \qquad \varepsilon^p = 0$

② $\varepsilon^e = 2Y/3E \qquad \varepsilon^p = \dfrac{\frac{2}{3}Y - \frac{1}{3}Y}{2E/3} = \dfrac{Y}{2E}$

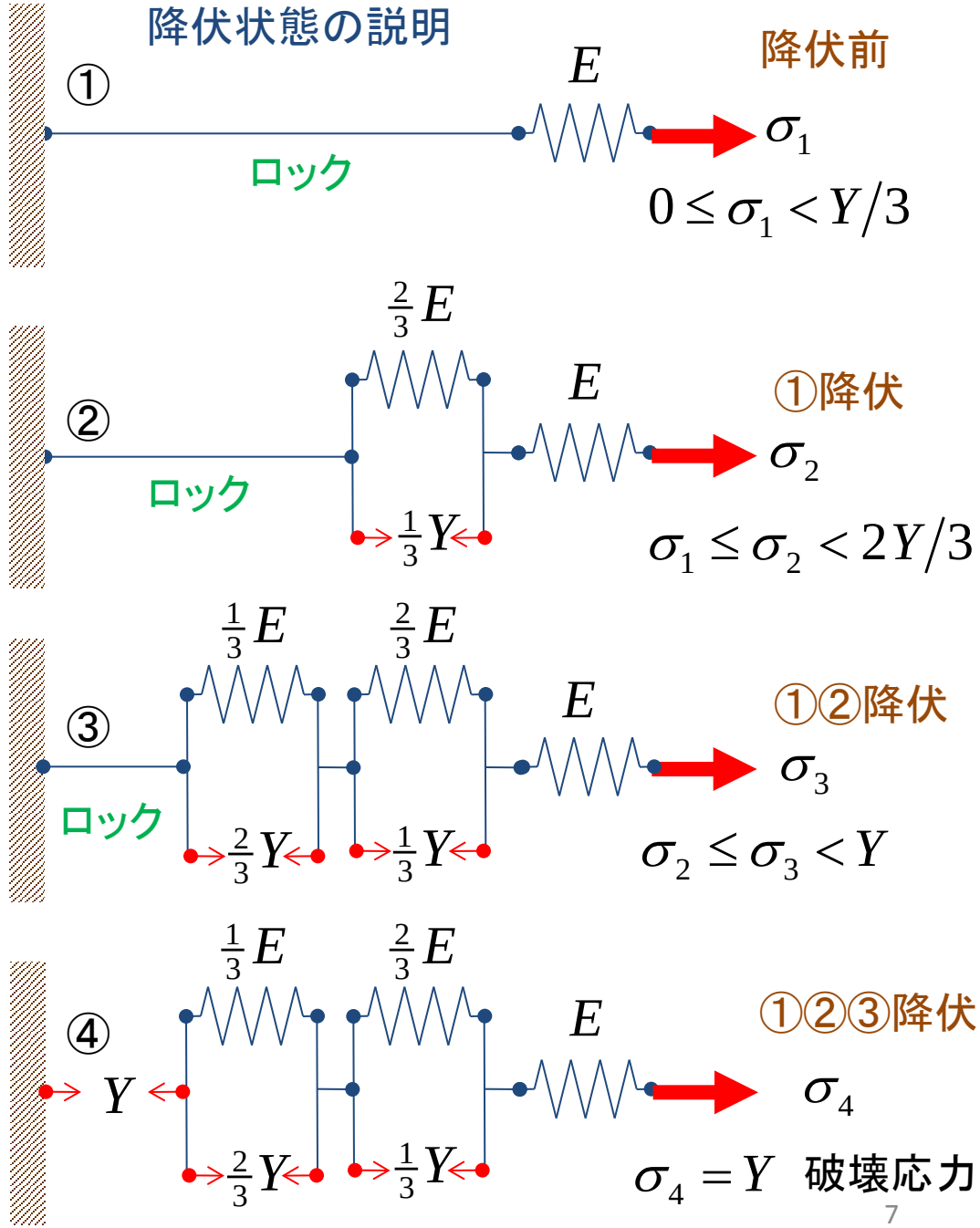
③ $\varepsilon^e = Y/E \qquad \varepsilon^p = \dfrac{Y - \frac{2}{3}Y}{E/3} + \dfrac{Y - \frac{1}{3}Y}{2E/3}$

$= 2Y/E$

結論

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p = \frac{\sigma}{E} + \sum_{i=1}^{N^*} \frac{\sigma - Y_i}{H_i}$$

N^* 最終降伏関数の番号



宿題

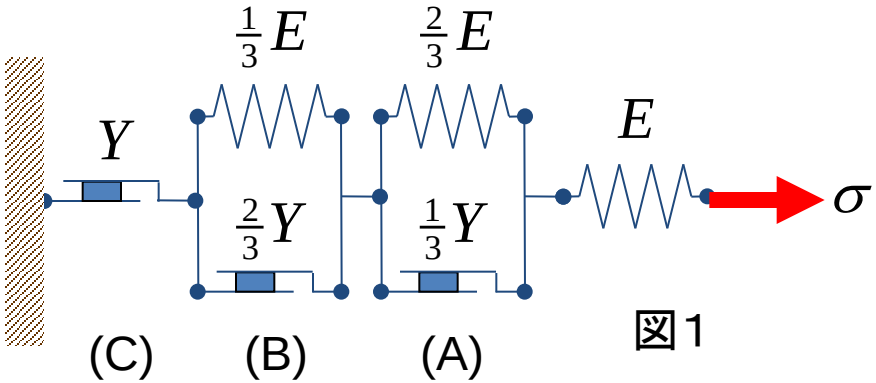


図1

図1に示すようにバネ系が壁に固定されている。図2のように表れる繰返し応力・ひずみ曲線において，各々バネの降伏点（σ, ε）を求めよ。

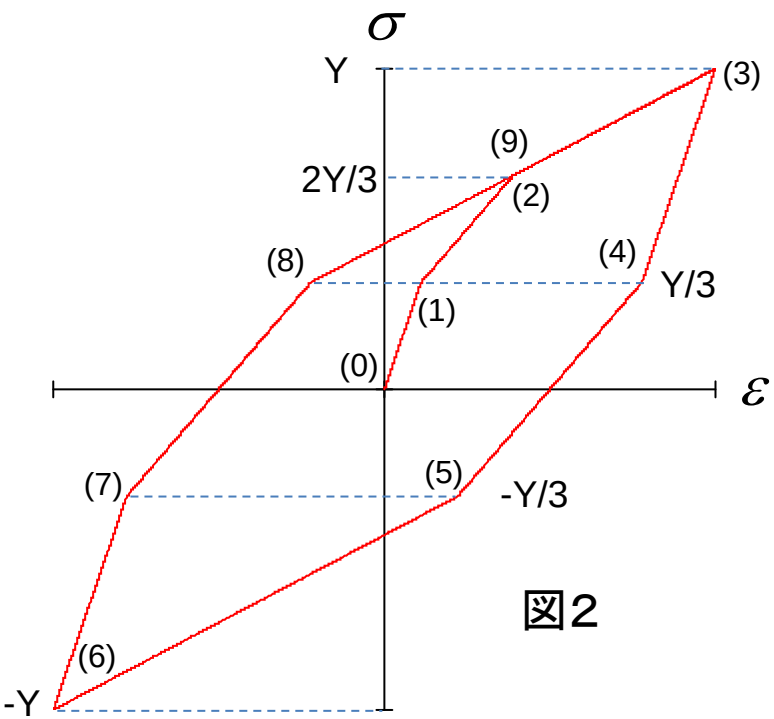


図2

$$\sigma = 0 \to \frac{Y}{3} \to \frac{2Y}{3} \to Y \to \frac{Y}{3} \to -\frac{Y}{3} \to -Y \to -\frac{Y}{3} \to \frac{Y}{3} \to \frac{2Y}{3}$$

回答

$$\varepsilon = 0 \to \frac{1}{3}\frac{Y}{E} \to \frac{7}{6}\frac{Y}{E} \to 3\frac{Y}{E} \to \frac{7}{3}\frac{Y}{E} \to \frac{2}{3}\frac{Y}{E} \to$$

$$-3\frac{Y}{E} \to -\frac{7}{3}\frac{Y}{E} \to -\frac{2}{3}\frac{Y}{E} \to \frac{7}{6}\frac{Y}{E}$$