はりの弾塑性解析

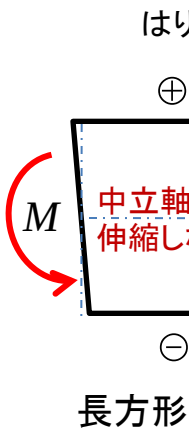
弾塑性力学

P.ティラポン

第10回 : 2014/7/8

弾塑性単純曲げ

①はりが長さ方向に一定の曲げモーメントを受け，横断面に垂直な応力の総和がゼロ
②断面は曲げられたのちも平面を保ち，曲がった後も縦軸線に垂直である



長方形断面

$$\sigma(y) = \frac{yY}{h/2}$$

$$\sigma(y) = \begin{cases} Y & \text{if } y > y' \\ \dfrac{yY}{y'} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\sigma(y) = Y$$

断面積 $A = \int_{-h/2}^{h/2} bdy = bh$

断面１次モーメント $\int_{-h/2}^{h/2} ybdy = 0$

断面2次モーメント $I = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 bdy = bh^3/12$

曲げモーメント $M = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma(y) ydA$

上下対称の場合 $= 2\int_{0}^{h/2} \sigma(y) bydy$

①降伏曲げモーメント

$$M_y = 2\int_0^{h/2} \frac{yY}{h/2} bydy$$

$$= \frac{Y}{h/2}\left(2\int_0^{h/2} by^2 dy\right)$$

$$= \frac{I}{h/2} Y = T_y \frac{2h}{3}$$

$$= \frac{bh^2}{6} Y$$

③全塑性曲げモーメント

$$M_p = 2\int_0^{h/2} Ybydy = T_p \frac{h}{2} = \frac{bh^2}{4} Y$$

（回転軸に対して，時計回りのモーメントの符号は正）

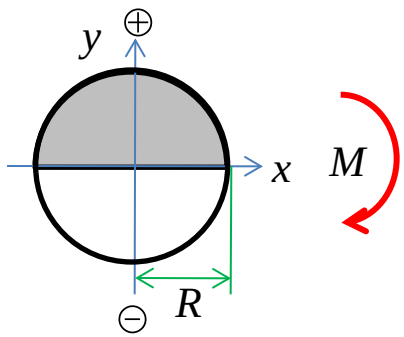
②弾塑性曲げモーメント

$$M_{ep} = 2\frac{Y}{y'}\int_0^{y'} by^2 dy + 2Y\int_{y'}^{h/2} bydy$$

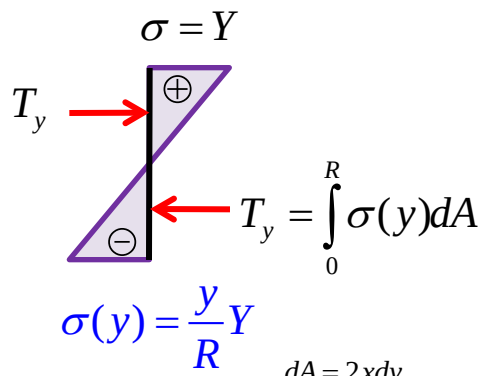
$$= bh^2 \frac{Y}{4}\left(1 - \frac{4}{3}\left(\frac{y'}{h}\right)^2\right)$$

円形断面

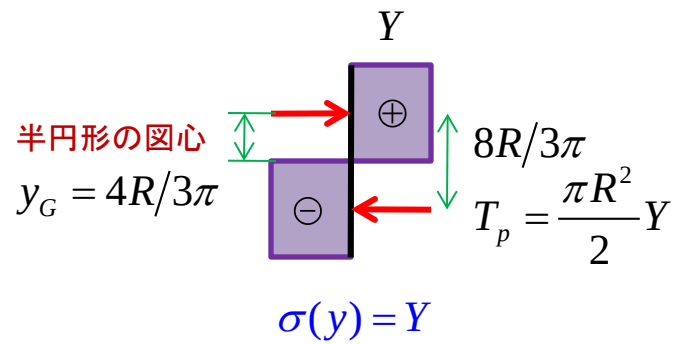
円形断面



弾性限界



全塑性



断面2次モーメント

$$I=\int_{-R}^{R} y^2 dA = 2\int_0^R y^2 dA$$

$$=\frac{\pi}{4}R^4$$

曲げモーメント

$$M=\int_{-R}^{R}\sigma(y)\,y\,dA$$

$$=2\int_0^R \sigma(y)\,y\,dA$$

上下対称の場合

降伏曲げモーメント

$$M_y = 2\int_0^R \frac{y}{R}Y y\,dA$$

$$dA = 2x\,dy$$
$$= 2R\cos\theta\, d\left(R\sin\theta\right)$$
$$= 2R^2\cos^2\theta\, d\theta$$

$$=2Y\int_0^{\pi/2}\frac{\left(R\sin\theta\right)^2}{R}\left(2R^2\cos^2\theta\right)d\theta$$

$$=YR^3\int_0^{\pi/2}\sin^2 2\theta\, d\theta = \frac{YR^3}{8}\int_0^{\pi/2}\left(1-\cos 4\theta\right)d4\theta$$

$$=\frac{YR^3}{8}\left(4\theta-\sin 4\theta\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi R^3}{4}Y$$

別法

$$M_y = \frac{I}{R}Y = \frac{\left(\pi R^4/4\right)}{R}Y = \frac{\pi R^3}{4}Y$$

全塑性曲げモーメント

$$M_p = 2\int_0^R Y y\,dA$$

$$=2Y\int_0^{\pi/2} R\sin\theta\left(2R^2\cos^2\theta\right)d\theta$$

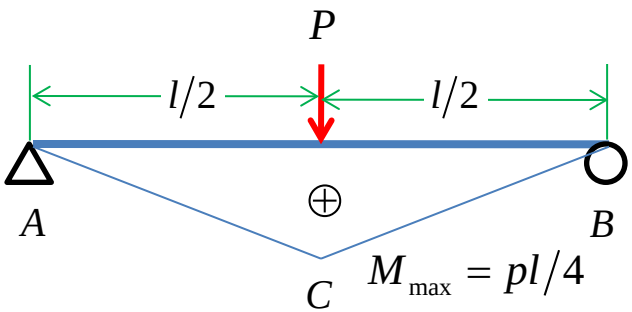
$$=-4R^3Y\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\, d\left(\cos\theta\right)$$

$$=-4R^3Y\left(\frac{\cos^3\theta}{3}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{4R^3}{3}Y$$

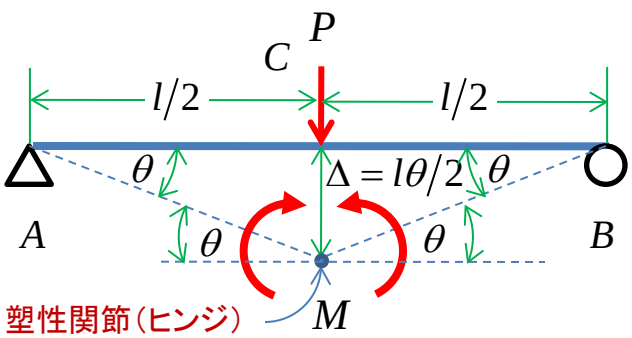
別法

$$M_p = 2T_p y_G = 2\left(\frac{\pi R^2}{2}Y\right)\left(\frac{4R}{3\pi}\right) = \frac{4R^3}{3}Y$$

集中荷重を受ける単純ばり



曲げモーメント図



崩壊機構（幾何学関係）

構造物の塑性崩壊荷重を求める方法

手法（A）：つり合い方程式（静力学的方法）

$$M = M_{max} = \frac{pl}{4}$$ 断面の曲げモーメント

$$\therefore p = \frac{4M}{l}$$

手法（B）：仮想仕事の原理（動力学的方法）

$$\underbrace{M\theta}_{\text{左点C}} + \underbrace{M\theta}_{\text{右点C}} = p\Delta = p\frac{l\theta}{2}$$ 曲げ仕事＝荷重・変位仕事

$$\Delta = \tan(\theta)\, l/2 \approx \theta l/2$$

微小変形による幾何学的関係

$$\therefore p = \frac{4M}{l}$$

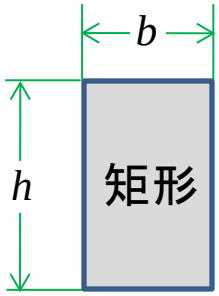
弾性限度荷重 $$p_y = \frac{4M_y}{l} = \frac{2bh^2Y}{3l}$$

崩壊（極限）荷重 $$p_p = \frac{4M_p}{l} = \frac{bh^2Y}{l} = 1.5p_y$$

構造物の設計：

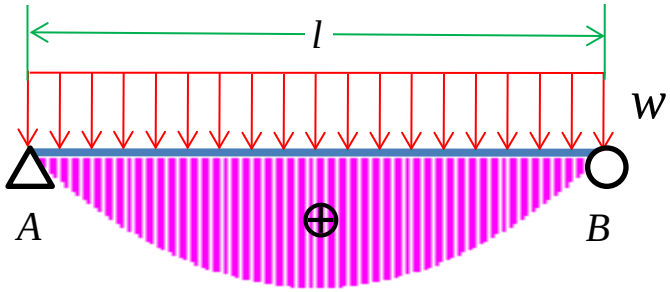
①弾性設計 $$bh^2 = \frac{3pl}{2Y}$$

②塑性設計（極限設計） $$bh^2 = \frac{pl}{Y}$$



断面

等分布荷重を受ける単純ばり

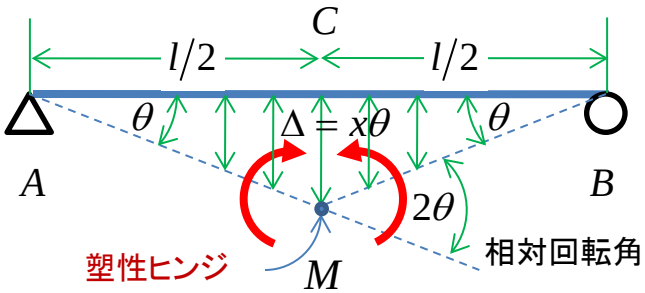


最大値　$M_{\max} = wl^2/8$

手法（A）：つり合い方程式（静力学的方法）

$M = M_{\max} = wl^2/8$　断面の曲げモーメント

$$\therefore w = \frac{8M}{l^2}$$



手法（B）：仮想仕事の原理（動力学的方法）

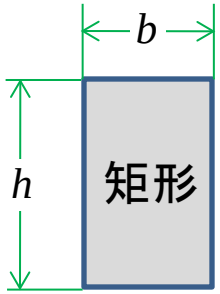
$2M\theta = 2\int_0^{l/2} wx\theta dx$　曲げ仕事＝荷重・変位仕事

$$= 2w\theta\left(\frac{x^2}{2}\right)_0^{l/2}$$

$$= \frac{w\theta l^2}{4}$$

$$\therefore w = \frac{8M}{l^2}$$

弾性限度荷重	$w_y = \dfrac{8M_y}{l^2} = \dfrac{4bh^2Y}{3l^2}$
崩壊（極限）荷重	$w_p = \dfrac{8M_p}{l^2} = \dfrac{2bh^2Y}{l^2} = 1.5w_y$



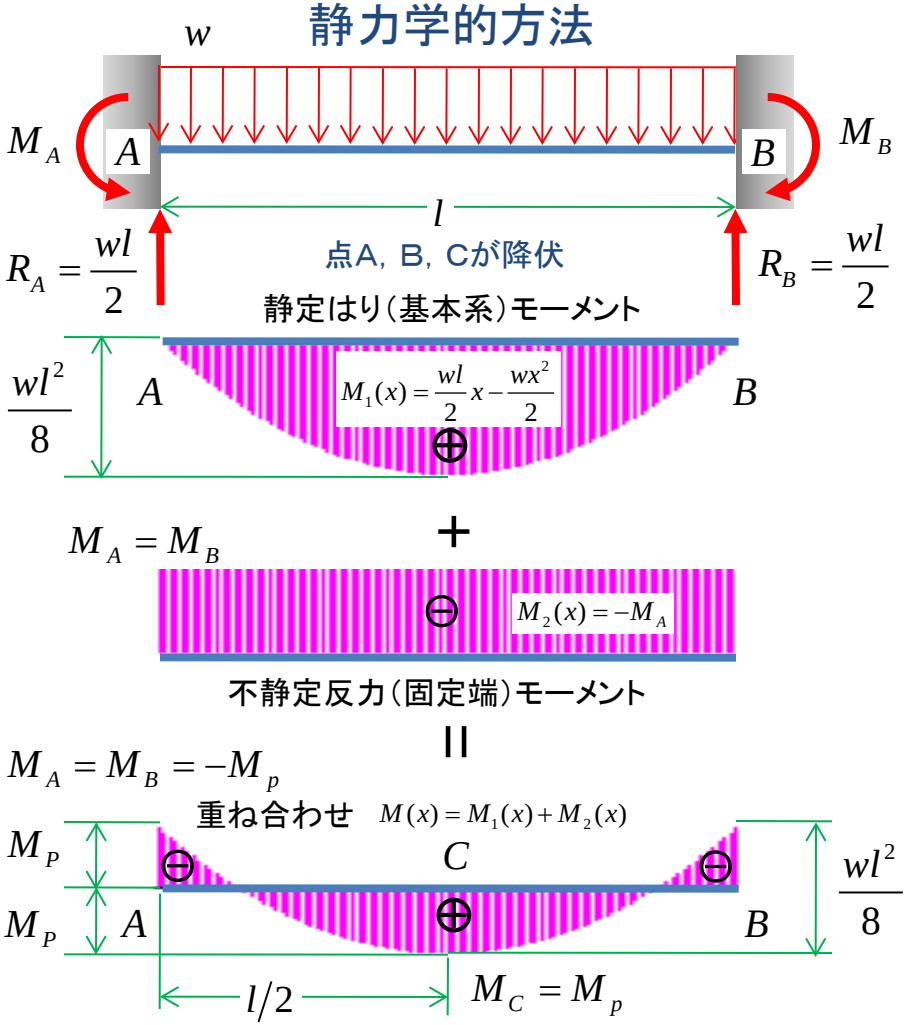
断面

$$M_y = \frac{bh^2}{6}Y$$

$$M_p = \frac{bh^2}{4}Y$$

等分布荷重を受ける両端固定ばり

静力学的方法

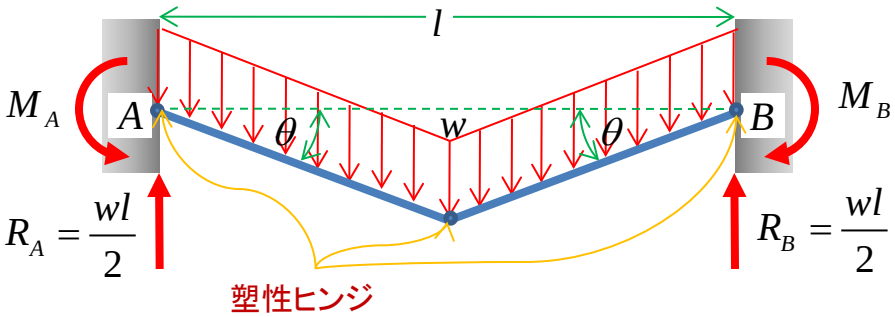


$$M_C = w_p l^2 / 8 - M_P = M_P$$

$$2M_P = w_p l^2 / 8 \quad \therefore w_p = \frac{16M_P}{l^2}$$

（静力学的方法）

動力学的方法



$$\underbrace{M_p 2\theta}_{\text{中央点}} + \underbrace{2M_p\theta}_{\text{両端}} = 2\int_0^{l/2} w_p x\theta dx$$

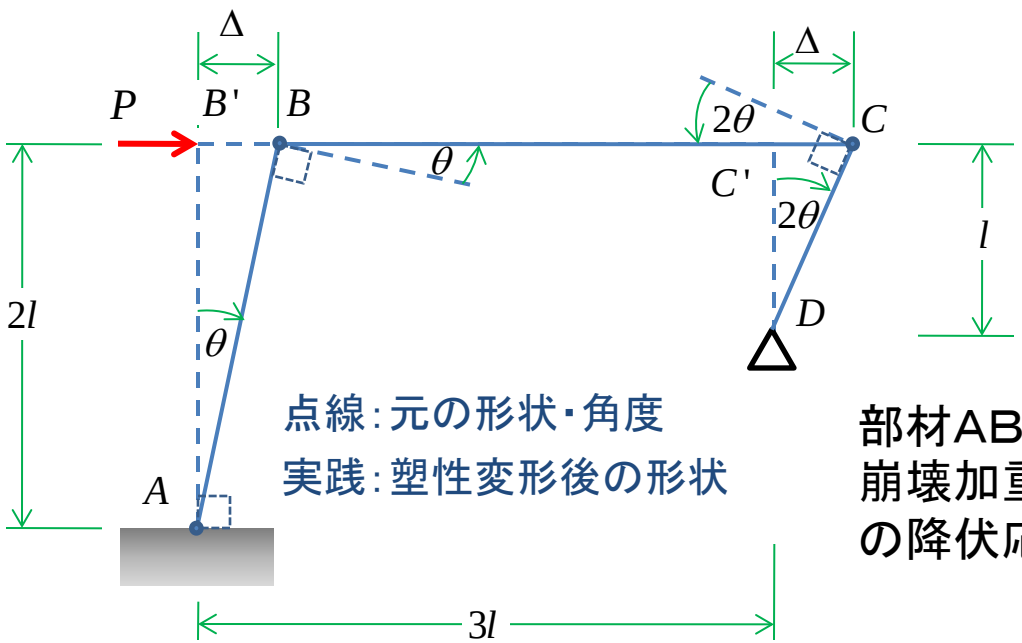
$$4M_p\theta = \frac{w_p\theta l^2}{4}$$

（動力学的方法）$w_p = \frac{16M_p}{l^2}$

静力学的方法の解＝動力学的方法の解

崩壊荷重　$w_p = \frac{16M_P}{l^2}$

水平方向の集中荷重を受ける骨組



点線：元の形状・角度
実践：塑性変形後の形状

幾何学的関係

$$B'B = C'C = \Delta$$

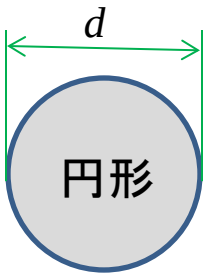
$$\theta_A = \frac{\Delta}{2l} = \theta \quad \theta_B = \frac{\Delta}{l} = 2\theta_A = 2\theta$$

$$\therefore \Delta = 2l\theta$$

部材AB，BC，CDは円形断面を考え、崩壊加重 P を求めよ。ただし、各部材の降伏応力をYとする

断面による全塑性曲げモーメント

$$M_p = \frac{d^3 Y}{6}$$



断面

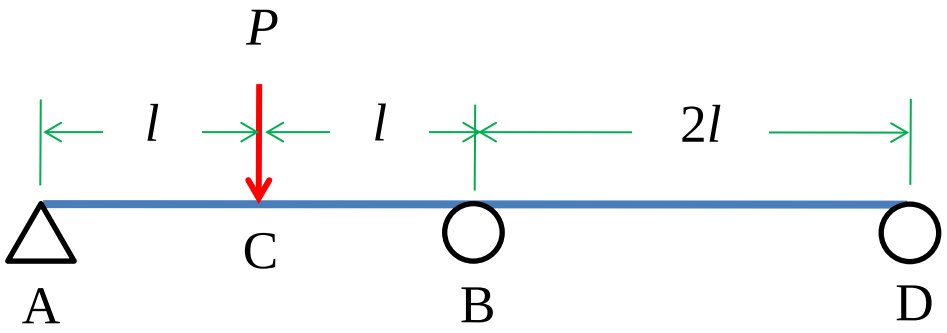
外部仕事 $\sum P\Delta = P_P \Delta = 2P_P l\theta$

内部仕事 $\sum M\theta = M_p\left(\underbrace{\theta}_{点A} + \underbrace{\theta}_{点B} + \underbrace{2\theta}_{点C}\right)$

仮想仕事原理 $\sum P\Delta = \sum M\theta \quad \therefore P_P = \dfrac{2M_p}{l}$

$$\therefore P_P = \frac{d^3}{3l} Y$$

宿題（2013年試験問題）



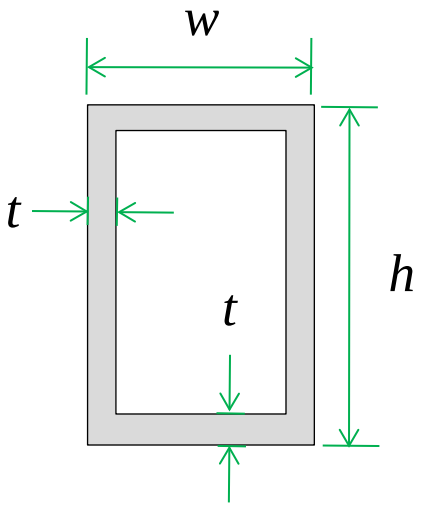


図4

図4のように，幅 w ,長さ h ,厚さ t の角パイプ長方形の断面をもった，全体の長さ $4l$ の不静定はりがC点に集中荷重 P を受けている。はりを構成する材料の降伏応力は Y である。以下の設問に答えよ。

1）はりの断面は全域塑性状態になったときに，抵抗できる曲げモーメントを求めよ。

2）塑性関節になる構造に，仮想仕事の原理を用いて，崩壊荷重 P を求めよ。