エネルギー法

弾塑性力学

P.ティラポン

第8回：2014/7/1

7月31日（木） 期末試験（15：05～16：35） S224

ひずみエネルギー

x軸に鉛直な面に働く応力による仕事

$$dU_{xx} = \frac{1}{2}\left(\left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}dx\right)dydz\right)\left(u + \varepsilon_{xx}dx\right) - \frac{1}{2}\left(\sigma_{xx}dydz\right)u$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + u\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\right)dxdydz$$

$$dU_{zx} = \frac{1}{2}\left(\left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}dx\right)dydz\right)\left(w + \frac{\partial w}{\partial x}dx\right) - \frac{1}{2}\left(\tau_{zx}dydz\right)w$$

$$= \frac{1}{2}\left(\tau_{zx}\frac{\partial w}{\partial x} + w\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}\right)dxdydz$$

$$dU_{yx} = \frac{1}{2}\left(\tau_{xy}\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\right)dxdydz$$

u, v, wはx,y,z軸方向のそれぞれ移動量

$$dU_{bx} = \frac{1}{2}b_x u dxdydz$$

物体力による仕事（x軸方向の分）

ひずみエネルギー

$$dU = \begin{pmatrix} dU_{xx} + dU_{zx} + dU_{yx} + dU_{bx} + \\ dU_{xy} + dU_{zy} + dU_{yy} + dU_{by} + \\ dU_{xz} + dU_{zz} + dU_{yz} + dU_{bz} \end{pmatrix}$$

平衡方程式

$$= \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} \sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \\ \sigma_{zz}\varepsilon_{zz} + \tau_{xy}\gamma_{xy} \\ \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u\left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + b_x\right) + \\ v\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial x} + b_y\right) + \\ w\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial x} + b_z\right) \end{pmatrix}\right)dxdydz$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{zz}\varepsilon_{zz} + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx}\right)dxdydz$$

$$= Wdxdydz$$

単位体積当たりのひずみエネルギー

$$\therefore \varepsilon_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \sigma_{ij}} \qquad \therefore \sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

$$W = \frac{1}{2}\left(\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{zz}\varepsilon_{zz} + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{xz}\gamma_{xz}\right)$$

$$= \frac{1}{2E}\left(\sigma_{xx}{}^2 + \sigma_{yy}{}^2 + \sigma_{zz}{}^2 - 2\nu\left(\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{xx}\sigma_{zz}\right)\right) + \frac{1}{2G}\left(\tau_{xy}{}^2 + \tau_{yz}{}^2 + \tau_{zx}{}^2\right)$$

$$= \frac{E\nu}{2(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}\right)^2 + G\left(\left(\varepsilon_{xx}{}^2 + \varepsilon_{yy}{}^2 + \varepsilon_{zz}{}^2\right) + \frac{1}{2}\left(\gamma_{xy}{}^2 + \gamma_{yz}{}^2 + \gamma_{zx}{}^2\right)\right)$$

等方・線形弾性体の構成式

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{xx} - \nu\left(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}\right)\right)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{yy} - \nu\left(\sigma_{xx} + \sigma_{zz}\right)\right)$$

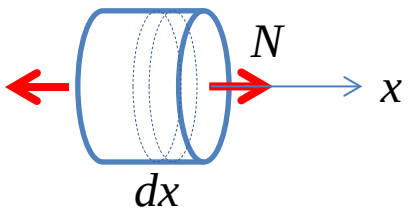
$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{zz} - \nu\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}\right)\right)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz}$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz}$$

部材に蓄えられる内部エネルギー



軸力によるひずみエネルギー

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

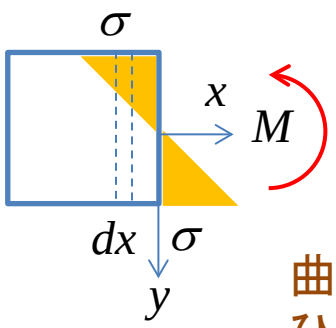
$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{AE}$$

$$W = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon = \frac{N^2}{2A^2E}$$

$$dU = WdV = WAdx$$

$$U = \int WAdx = \int \frac{N^2}{2A^2E} Adx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{N^2}{AE} dx$$



曲げモーメントによる
ひずみエネルギー

$$\sigma = \frac{My}{I}$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{My}{EI}$$

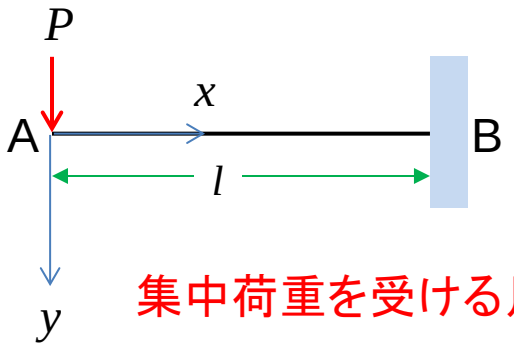
$$W = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon = \frac{M^2y^2}{2EI^2}$$

$$dU = WdV = WdAdx$$

$$U = \int WdV = \frac{1}{2}\int \frac{M^2}{EI^2}\left(\int_A y^2 dA\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{M^2}{EI} dx$$

静定・不静定梁の問題



集中荷重を受ける片持ち梁

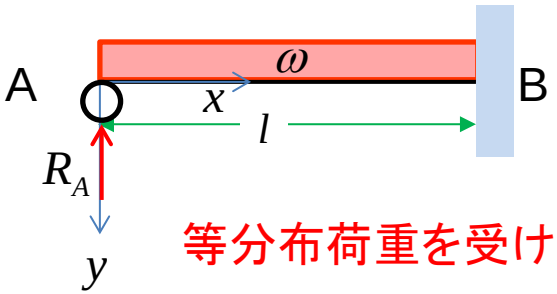
$$M(x) = -Px$$

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M(x)^2}{EI}dx = \frac{P^2}{2EI}\int_0^l x^2 dx$$

$$= \frac{P^2 l^3}{6EI}$$

外力の偏微分

$$\therefore y_A = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{Pl^3}{3EI}$$



等分布荷重を受ける不静定梁

$$M(x) = R_A x - \frac{wx^2}{2}$$

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M(x)^2}{EI}dx = \frac{1}{2EI}\int_0^l \left(R_A x - \frac{wx^2}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{2EI}\left(\frac{l^3}{3}R_A{}^2 - \frac{wl^4}{4}R_A + \frac{w^2 l^5}{20}\right)$$

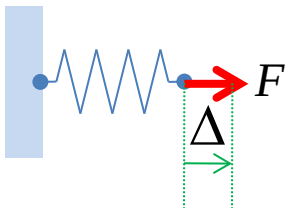
反力で偏微分

$$y_A = \frac{\partial U}{\partial R_A} = 0 = \frac{1}{2EI}\left(\frac{2l^3}{3}R_A - \frac{wl^4}{4}\right)$$

$$\therefore R_A = \frac{3wl}{8}$$

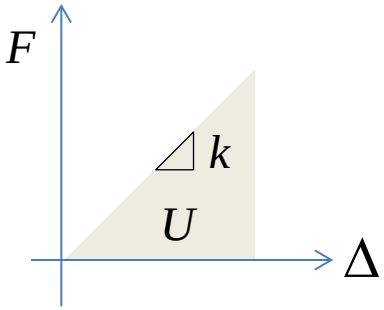
最小ポテンシャルエネルギー原理

力の静的なつり合い状態では，ポテンシャルエネルギーの総和が最小になる。



フック法則

$$F = k\Delta$$



抵抗力によるポテンシャルエネルギー（内部のエネルギー）

$$U = \frac{1}{2}F\Delta = \frac{1}{2}k\Delta^2 > 0 \qquad \bar{U} = \frac{1}{2}F\Delta = \frac{1}{2}\frac{F^2}{k} > 0$$

ポテンシャルエネルギーの変化（外力のエネルギー）

$$\Omega = -F\Delta < 0$$

系全体のポテンシャルエネルギー（ポテンシャルエネルギー）

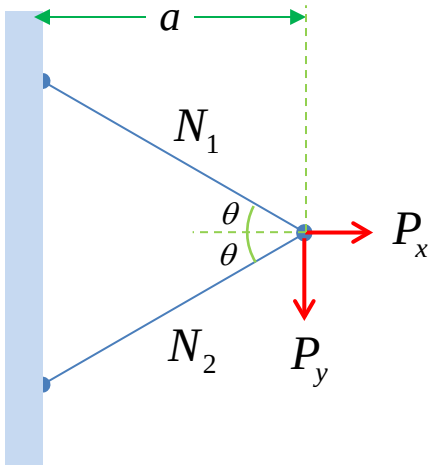
$$\Pi = U + \Omega = \frac{1}{2}k\Delta^2 - F\Delta \qquad \frac{d\Pi}{d\Delta} = k\Delta - F = 0 \Rightarrow F = k\Delta \qquad \frac{d^2\Pi}{d\Delta^2} = k > 0$$

最小値

$$\Pi = \bar{U} + \Omega = \frac{1}{2}\frac{F^2}{k} - F\Delta \qquad \frac{d\Pi}{dF} = \frac{F}{k} - \Delta = 0 \Rightarrow \Delta = \frac{F}{k} \qquad \frac{d^2\Pi}{dF^2} = \frac{1}{k} > 0$$

最小値

静定トラスの問題



$$\Pi = U - P_x\Delta_x - P_y\Delta_y$$

ポテンシャルエネルギー

$$\frac{\partial \Pi}{\partial P_x} = \frac{\partial U}{\partial P_x} - \Delta_x = 0 \Rightarrow \Delta_x = \frac{\partial U}{\partial P_x}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial P_y} = \frac{\partial U}{\partial P_y} - \Delta_y = 0 \Rightarrow \Delta_y = \frac{\partial U}{\partial P_y}$$

最小ポテンシャル
エネルギーの原理

$$U = \frac{1}{2}\int_0^{a/\cos\theta} \frac{N_1^{\ 2}}{AE} dl + \frac{1}{2}\int_0^{a/\cos\theta} \frac{N_2^{\ 2}}{AE} dl$$

$$= \frac{1}{2}\frac{N_1^{\ 2}}{AE}\frac{a}{\cos\theta} + \frac{1}{2}\frac{N_2^{\ 2}}{AE}\frac{a}{\cos\theta}$$

$$= \frac{a}{2AE\cos\theta}\left(N_1^{\ 2} + N_2^{\ 2}\right)$$

$$= \frac{a}{4AE\cos\theta}\left(\left(\frac{P_x}{\cos\theta}\right)^2 + \left(\frac{P_y}{\sin\theta}\right)^2\right)$$

$$\therefore \Delta_x = \frac{\partial U}{\partial P_x} = \frac{P_x}{2AE}\frac{a}{\cos^3\theta} \qquad \therefore \Delta_y = \frac{\partial U}{\partial P_y} = \frac{P_y}{2AE}\frac{a}{\cos\theta\sin^2\theta}$$

力のつり合い式

$$N_1\cos\theta + N_2\cos\theta = P_x$$

$$N_1\sin\theta - N\sin\theta_2 = P_y$$

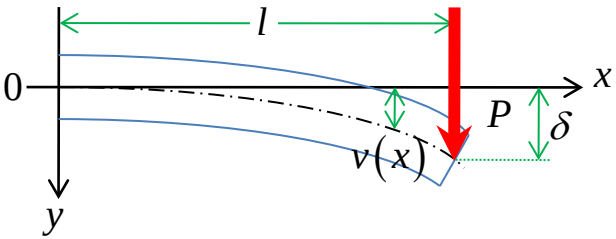
部材力

$$N_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{P_x}{\cos\theta} + \frac{P_y}{\sin\theta}\right)$$

$$N_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{P_x}{\cos\theta} - \frac{P_y}{\sin\theta}\right)$$

近似解析法（レイリー・リッツの手法）

下図に示す片持ちはり（長さ l，断面2次モーメント I，ヤング率 E）の先端に集中荷重 P が働いたときの，はりの先端のたわみ δ を，つぎに仮定された y 方向の変位 v から，先端の変位を求めよ。



$$v(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3$$

弾性問題の近似解法に対する動的可容変位場を未知数系 a_1, a_2, a_3, a_4を含む関数で仮定する。

片持ちはりの条件

固定支点： x=0, v=0, dv/dx=0

$$v(0) = 0 \Rightarrow a_1 = 0$$

$$\left.\frac{d}{dx} v(x)\right|_{x=0} = 0 \Rightarrow a_2 = 0$$

$$\therefore v(x) = (a_3 + a_4 x) x^2 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d}{dx} v(x) = 2a_3 x + 3a_4 x^2 \\ \dfrac{d^2}{dx^2} v(x) = 2a_3 + 6a_4 x \end{cases}$$

ひずみエネルギー

$$U = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx = \frac{1}{2} EI \int_0^l \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx = 2EIl\left(a_3{}^2 + 3a_3 a_4 l + 3a_4{}^2 l^2\right) \Leftarrow \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

はりのたわみ

ポテンシャルエネルギー

$$\Pi = U - P\delta = 2EIl\left(a_3{}^2 + 3a_3 a_4 l + 3a_4{}^2 l^2\right) - P\left(a_3 + a_4 l\right) l^2$$

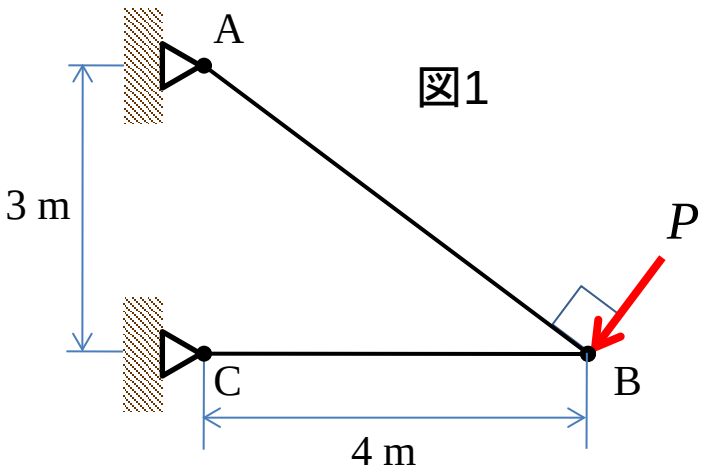
$$\Uparrow \quad \delta = v(l) = \left(a_3 + a_4 l\right) l^2$$

ポテンシャルエネルギーが停留する次の条件より未知係数を決定する。

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_3} = 0 \Rightarrow a_3 = \frac{Pl}{4EI} - \frac{3}{2} a_4 l \Rightarrow \frac{\partial \Pi}{\partial a_4} = 0 \Rightarrow a_4 = -\frac{P}{6EI} \Rightarrow \therefore v(x) = \frac{P}{6EI}(3l - x) x^2$$

解答　先端の変位　$\therefore \delta = v(l) = \dfrac{Pl^3}{3EI}$

宿題（2012年試験問題）



エネルギー原理を用いて，図1に示すような両端が回転自由に結合された同一の断面積Aとヤング率Eを有する棒AB,BCにおいて，B点に斜めの荷重 P を作用するとき，B点の水平変位および垂直変位を求めよ。