構成式･応力関数

弾塑性力学

P.ティラポン

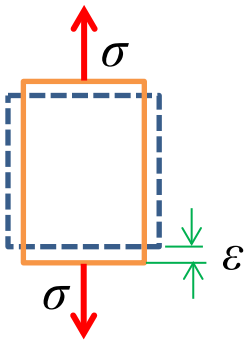
第5回 : 2014/6/24

弾性体力学の基本

$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx}(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz})$

E = ヤング率（縦弾性係数）

$$E = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$$



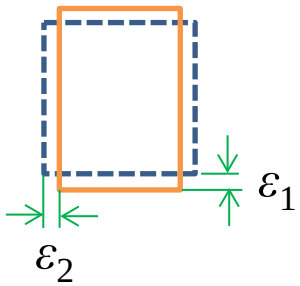
$$d\varepsilon_{xx} = \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial \sigma_{xx}} d\sigma_{xx} + \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial \sigma_{yy}} d\sigma_{yy} + \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial \sigma_{zz}} d\sigma_{zz}$$

$$= \frac{1}{E} d\sigma_{xx} + \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial \varepsilon_{yy}} \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial \sigma_{yy}} d\sigma_{yy} + \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial \varepsilon_{zz}} \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial \sigma_{zz}} d\sigma_{zz}$$

$$= \frac{1}{E} d\sigma_{xx} - \nu \frac{1}{E} d\sigma_{yy} - \nu \frac{1}{E} d\sigma_{zz}$$

ν = ポアソン比

$$\nu = -\frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon_1}$$



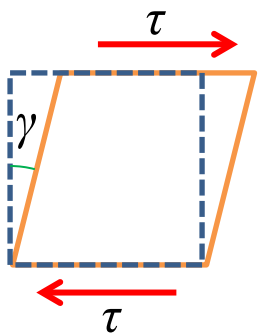
$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{xx} - \nu\left(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}\right)\right)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{yy} - \nu\left(\sigma_{xx} + \sigma_{zz}\right)\right)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{zz} - \nu\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}\right)\right)$$

G=せん断弾性係数

$$G = \frac{d\tau}{d\gamma}$$



$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz}$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz}$$

構成式（応力～ひずみ関係式）

等方性線形弾性体の構成式（フックの法則）

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}^{\mathbf{e}} \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

逆行列

$$\left[\mathbf{D}^{\mathbf{e}}\right]^{-1} = \mathbf{C}^{\mathbf{e}} \Leftrightarrow \left[\mathbf{C}^{\mathbf{e}}\right]^{-1} = \mathbf{D}^{\mathbf{e}}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^{\mathbf{e}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 & 0 \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 & 0 \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}$$

$$D_{11} = D_{22} = D_{33} = \frac{1}{E}$$

$$D_{12} = D_{13} = D_{21} = D_{23} = D_{31} = D_{32} = -\frac{\nu}{E}$$

$$D_{44} = D_{55} = D_{66} = \frac{2(1+\nu)}{E} = \frac{1}{G}$$

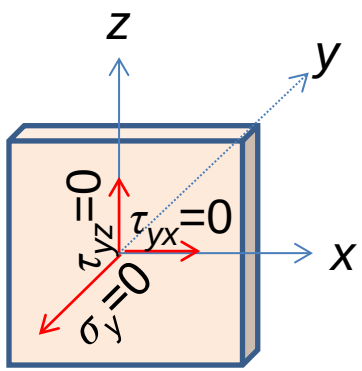
$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$C_{12} = C_{13} = C_{21} = C_{23} = C_{31} = C_{32} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

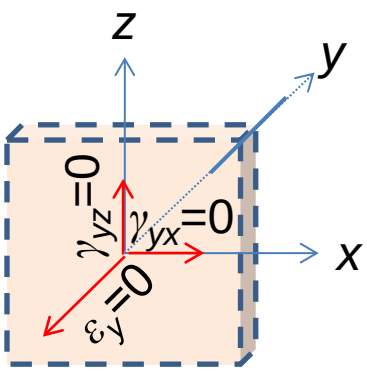
$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = \frac{E}{2(1+\nu)} = G$$

E = ヤング率，　ν = ポアソン比, G = せん断弾性係数

フック法則（二次元直交座標系）



厚さ方向はy方向



平面応力 $\sigma_y=0, \tau_{yx}=0, \tau_{yz}=0$

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{xz}\end{Bmatrix}=\frac{1}{E}\begin{bmatrix}1 & -\nu & 0\\ -\nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2(1+\nu)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_z\\ \tau_{xz}\end{Bmatrix}$$

逆関係

$$\varepsilon_y=-\frac{\nu}{E}(\sigma_x+\sigma_z)$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_z\\ \tau_{xz}\end{Bmatrix}=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{xz}\end{Bmatrix}$$

平面ひずみ $\varepsilon_y=0, \gamma_{yx}=0, \gamma_{yz}=0$

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{xz}\end{Bmatrix}=\frac{1}{E}\begin{bmatrix}1-\nu^2 & -\nu(1+\nu) & 0\\ -\nu(1+\nu) & 1-\nu^2 & 0\\ 0 & 0 & 2(1+\nu)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_z\\ \tau_{xz}\end{Bmatrix}$$

逆関係

$$\sigma_y=\nu(\sigma_x+\sigma_z)$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_z\\ \tau_{xz}\end{Bmatrix}=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1-\nu & \nu & 0\\ \nu & 1-\nu & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{xz}\end{Bmatrix}$$

平面応力問題におけるフック法則 $\nu \leftarrow \nu/(1-\nu), E \leftarrow E/(1-\nu^2)$ 仮想関係 平面ひずみ問題におけるフック法則

2次元直交座標系の応力関数（平面応力）

エアリー関数

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_z\\ \tau_{xz}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2}+V\\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}+V\\ -\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}\end{Bmatrix}$$

フック法則（平面応力）

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{xz}\end{Bmatrix}=\frac{1}{E}\begin{Bmatrix}\sigma_x-\nu\sigma_z\\ \sigma_z-\nu\sigma_x\\ 2(1+\nu)\tau_{xz}\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{xz}\end{Bmatrix}=\frac{1}{E}\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2}-\nu\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}+(1-\nu)V\\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}-\nu\dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2}+(1-\nu)V\\ -2(1+\nu)\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}\end{Bmatrix}$$

$$p=\frac{\sigma_x+\sigma_z}{2}=\frac{1}{2}\nabla^2 F+V$$

ひずみの適合条件式（二次元直交座標系）

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\gamma_{xz}}{\partial x\partial z}=0$$

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial z^2}+\frac{\partial^4}{\partial z^4}\right)F=-(1-\nu)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)V$$

$$\nabla^4 F=-(1-\nu)\nabla^2 V \quad\Rightarrow\quad \nabla^2 p=\frac{1+\nu}{2}\nabla^2 V$$

$$A\frac{\partial^2}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}+C\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$\nabla^2 V(x,z)=0$ の場合（物体力が一定）

$$\begin{cases}A=1, B=0, C=1\\ B^2-4AC=-4<0\end{cases}$$

重調和関数 $\nabla^4 F=0$

$$\nabla^2 p=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)p=0$$

∴重調和関数は楕円型偏微分方程式である。

$\nabla^2=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial z^2$ ： ラプラシアン（ラプラス作用素）

$\nabla^4=\nabla^2\nabla^2=\partial^4/\partial x^4+2(\partial^4/\partial x^2\partial z^2)+\partial^4/\partial z^4$ ： ダブルラプラシアン

直交座標系における重調和関数の解

$$\nabla^4 F = \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4}{\partial z^4} \right) F = 0$$

多項式によるエアリー関数（物体力を無視する場合）

$$F_2(x,z) = a_2 x^2 + b_2 xz + c_2 z^2$$

$$\nabla^4 F_2 = 0$$

⇨ 2次多項式による計3個係数（a_2, b_2, c_2）

$$F_3(x,z) = F_2(x,z) + a_3 x^3 + b_3 x^2 z + c_3 x z^2 + d_3 z^3$$

$$\nabla^4 F_3 = 0$$

⇨ 3次多項式による計7個係数（$a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3, d_3$）

$$F_4(x,z) = F_3(x,z) + a_4 x^4 + b_4 x^3 z + c_4 x^2 z^2 + d_4 x z^3 + e_4 z^4$$

$$\nabla^4 F_4 = \underbrace{24a_4 + 8c_4 + 24e_4}_{0} = 0 \rightarrow e_4 = -a_4 - \tfrac{1}{3} c_4$$

$$\therefore F_4(x,z) = F_3(x,z) + a_4 \left(x^4 - z^4 \right) + b_4 x^3 z + c_4 \left(x^2 z^2 - \tfrac{1}{3} z^4 \right) + d_4 x z^3$$

⇨ 4次多項式による計11個係数（$a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3, d_3, a_4, b_4, c_4, d_4$）

$$F_5(x,z) = F_4(x,z) + a_5 x^5 + b_5 x^4 z + c_5 x^3 z^2 + d_5 x^2 z^3 + e_5 x z^4 + f_5 z^5$$

$$\nabla^4 F_5 = \underbrace{\left(24a_4 + 8c_4 + 24e_4\right)}_{0} + \underbrace{\left(120a_5 + 24e_5 + 24c_5\right)}_{0} x + \underbrace{\left(24b_5 + 120 f_5 + 24d_5\right)}_{0} z$$

$$= 0 \rightarrow \begin{cases} e_4 = -a_4 - \tfrac{1}{3} c_4 \\ f_5 = -\tfrac{1}{5} b_5 - \tfrac{1}{5} d_5 \\ e_5 = -5a_5 - c_5 \end{cases}$$

⇨ 5次多項式による計15個係数（$a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3, d_3, a_4, b_4, c_4, d_4, a_5, b_5, c_5, d_5$）

$$\therefore F_5(x,z) = F_4(x,z) + a_5 \left(x^5 - 5xz^4 \right) + b_5 \left(-\tfrac{1}{5} z^5 + x^4 z \right) + c_5 \left(-xz^4 + x^3 z^2 \right) + d_5 \left(-\tfrac{1}{5} z^5 + x^2 z^3 \right)$$

極座標系における重調和関数の解

$$F(r,\theta)=f(r)\cos n\theta$$

$$\nabla^2 F(r,\theta)=\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)F(r,\theta)=\cos n\theta\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\left(\frac{n}{r}\right)^2\right)f(r)$$

$$\nabla^4 F(r,\theta)=\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\nabla^2 F(r,\theta)$$

$$f(r)=r^k$$

$$=\cos n\theta\left(\frac{d^4}{dr^4}+\frac{2}{r}\frac{d^3}{dr^3}-\frac{1+2n^2}{r^2}\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1+2n^2}{r^2}\frac{d}{dr}+\frac{n^2(n^2-4)}{r^4}\right)f(r)=0 \Rightarrow \therefore k=\begin{Bmatrix} n+2 \\ n \\ 2-n \\ -n \end{Bmatrix}$$

$$n\geq 2$$

$$\therefore f(r)=A_{n1}r^{n+2}+A_{n2}r^{2-n}+A_{n3}r^{n}+A_{n4}r^{-n}$$

同様に $F(r,\theta)=f(r)\sin n\theta$ ⇒ $\therefore f(r)=B_{n1}r^{n+2}+B_{n2}r^{2-n}+B_{n3}r^{n}+B_{n4}r^{-n}$

Mitchell(1899)によって証明された $\nabla^4 F(r,\theta)=0$ の理論解

$$F(r,\theta)=A_{01}r^2+A_{02}\ln r+A_{03}\theta+A_{04}r^2\theta$$
$$+\left(A_{11}r^3+A_{12}r\ln r+A_{13}r\theta+A_{14}r^{-1}\right)\cos\theta+\sum_{n=2}^{\infty}\left(A_{n1}r^{n+2}+A_{n2}r^{2-n}+A_{n3}r^{n}+A_{n4}r^{-n}\right)\cos n\theta$$
$$+\left(B_{11}r^3+B_{12}r\ln r+B_{13}r\theta+B_{14}r^{-1}\right)\sin\theta+\sum_{n=2}^{\infty}\left(B_{n1}r^{n+2}+B_{n2}r^{2-n}+B_{n3}r^{n}+B_{n4}r^{-n}\right)\sin n\theta$$

応力関数法：フック法則(1660)→アエリー応力関数(1862) →サン・ブナンのひずみ適合条件(1864) →ベルトラミの適合条件式(1892) →ミッチェルの重調和関数の解(1899)

宿題（2013年試験問題）

平面応力状態にある物体内の応力を考える。純粋せん断応力は図1のように与えられているものとすると，以下の設問に答えよ。なお，フックの法則は以下のように示す。ただし，E はヤング率，ν はポアソン比，G はせん断弾性係数である。

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}\right)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}\right)$$

$$\gamma_{xy} = \varepsilon_{xy} + \varepsilon_{yx} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$$

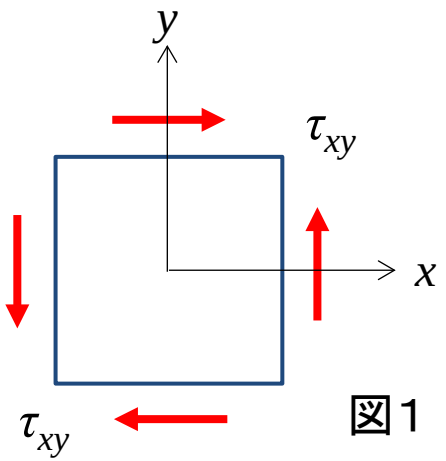


図1

1）純粋せん断状態の主応力を求めよ。
2）フックの法則を用いて，主応力の作用する方向に生じる主ひずみを示せ。
3）フックの法則を用いて，純粋せん断状態のひずみ成分を示せ。
4）純粋せん断状態の主ひずみを求めよ。
5）4）から得られる最大主ひずみは，2）から得られる最大主ひずみに等しいので，G を E と ν で表す関係式を求めよ。