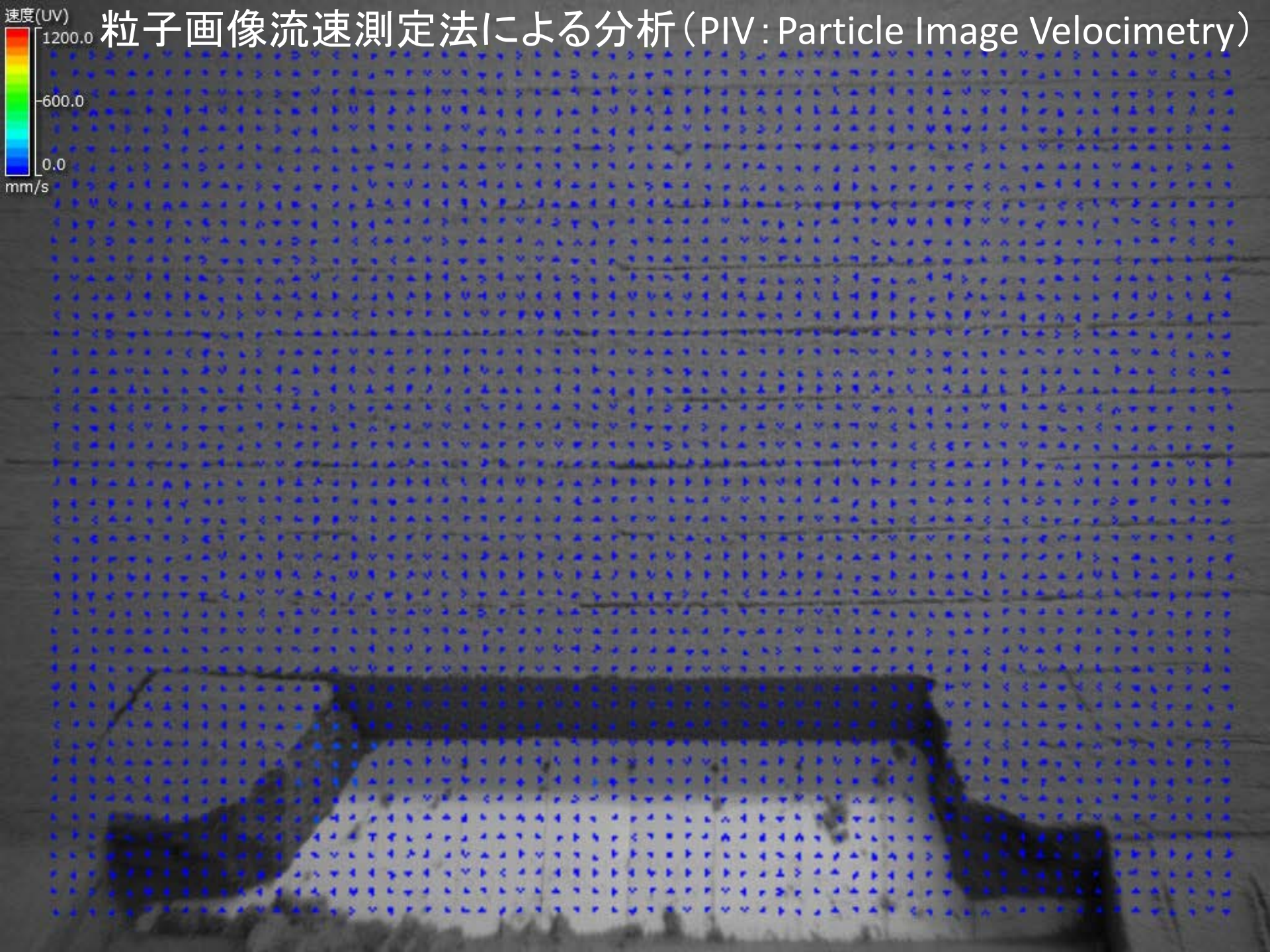
ひずみ・適合条件

弾塑性力学

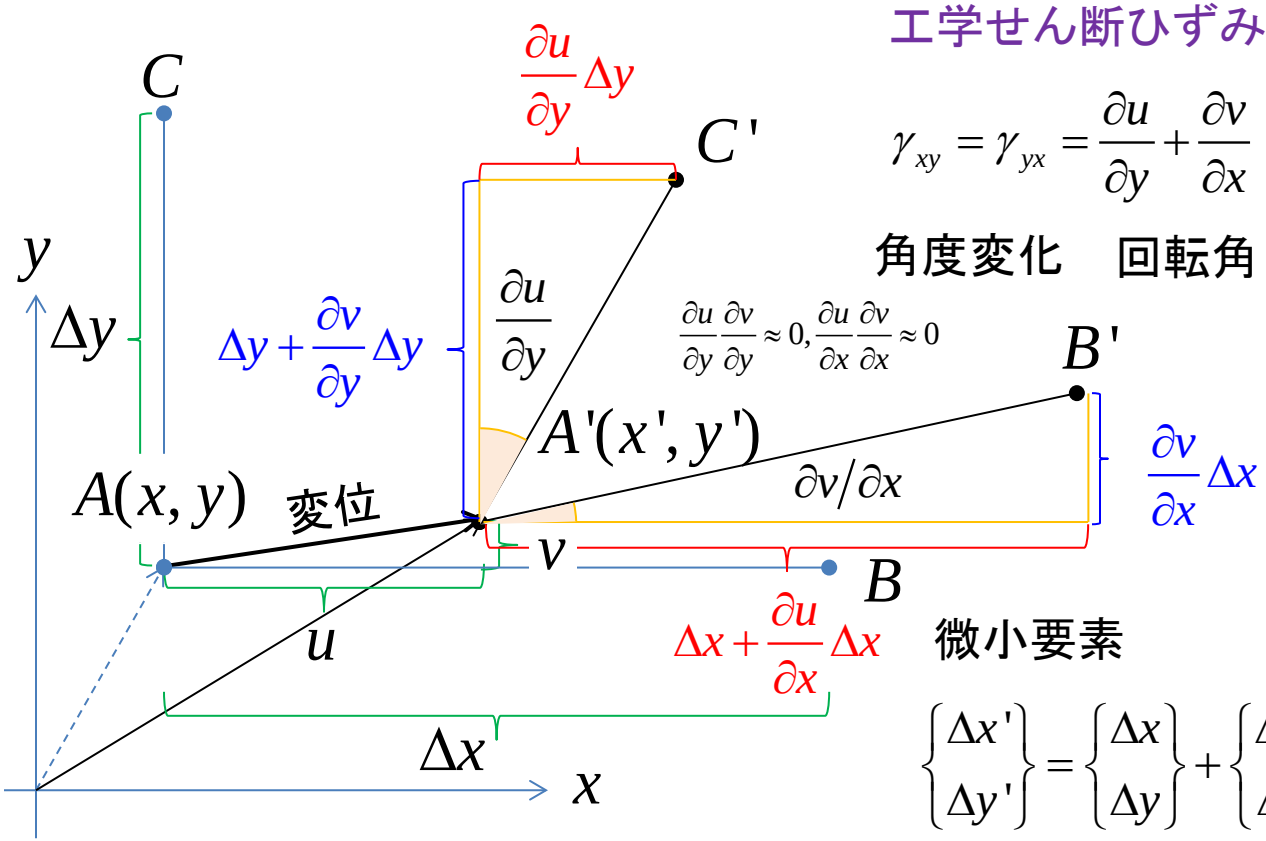
P.ティラポン

第3回 : 2014/6/17

粒子画像流速測定法による分析（PIV：Particle Image Velocimetry）



ひずみと変位の関係（微小変形）



工学せん断ひずみ

$$\gamma_{xy}=\gamma_{yx}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}$$

せん断ひずみ

$$\varepsilon_{yx}=\varepsilon_{xy}=\frac{\gamma_{xy}}{2}$$

角度変化　回転角 回転角

垂直ひずみ（伸び・縮み）

$$\varepsilon_{xx}=\frac{\Delta x'-\Delta x}{\Delta x}=\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{yy}=\frac{\Delta y'-\Delta y}{\Delta y}=\frac{\partial v}{\partial y}$$

微小要素

$$\begin{Bmatrix}\Delta x'\\ \Delta y'\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\Delta u\\ \Delta v\end{Bmatrix}$$

物体内の点Aの位置

$$\begin{Bmatrix}x'\\ y'\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}x\\ y\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}u\\ v\end{Bmatrix}$$

移動後　移動前　変位

$$\begin{Bmatrix}\Delta u\\ \Delta v\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\\ \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy}\\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_{yy}\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{Bmatrix}$$

ひずみの適合条件式（二次元直交座標系）

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$
$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial v}{\partial z}$$
$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$\frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z}$$
$$\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}$$
$$\frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial z} = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$
$$\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$$
$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial z}$$
$$\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial z} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial z}$$
$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial z^2}$$
$$\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial z^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial z}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial z^2}$$
$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial z^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial z^3}$$
$$\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial z^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial z^2}$$

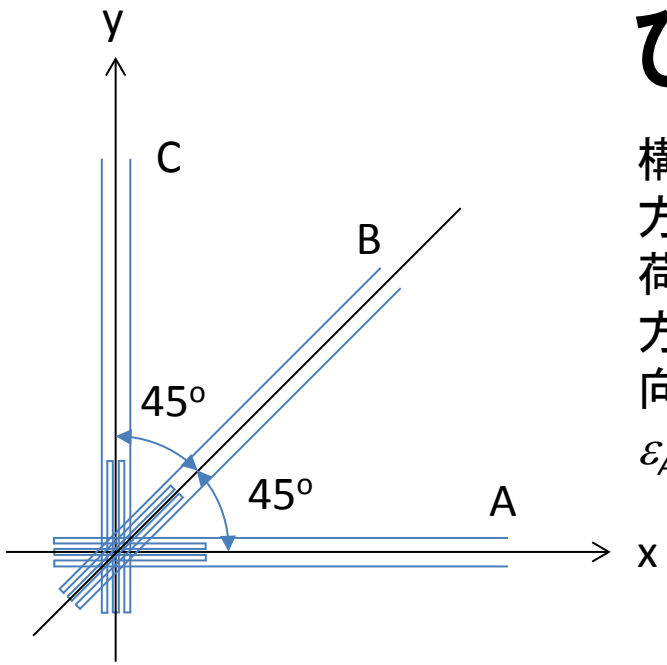
成立された
必要条件

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} = 0$$

ひずみ成分の間に拘束条件が成立しなければなりませんので，それぞれ成分は独立ではない。

Barré de Saint-Venant (1864)
バレー・ド・サン・ブナン

ひずみゲージ



構造物に発生する2次元ひずみを測定するため、異なった方向にセットした3個のひずみゲージを試験片に貼る。ある荷重状態で以下のように直角ロゼットゲージの測定値（A方向、B方向、C方向）が得られた。主ひずみの大きさと方向を求めよ。

$\varepsilon_A=400\times10^{-6}$, $\varepsilon_B=450\times10^{-6}$, $\varepsilon_C=100\times10^{-6}$

1）測定方向をそれぞれ法線ベクトルで表すと，以下のようになる。

$$\mathbf{n_A}=\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix},\mathbf{n_B}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix},\mathbf{n_C}=\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix}$$

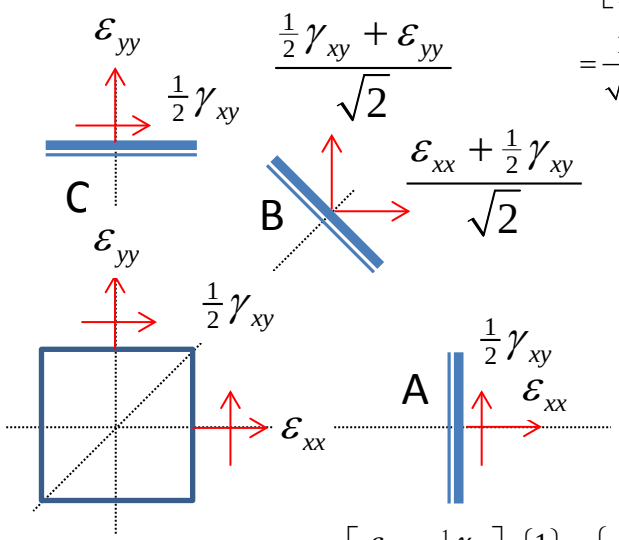
2）与えた軸に従ったひずみ成分を行列で表現すると，以下のようになる。

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy}\\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_{yy}\end{bmatrix}$$

3）それぞれ方向の表面ひずみを示す

$$\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathbf{n_C}=\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy}\\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_{yy}\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\frac{1}{2}\gamma_{xy}\\ \varepsilon_{yy}\end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathbf{n_B}=\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy}\\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_{yy}\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}+\frac{1}{2}\gamma_{xy}\\ \frac{1}{2}\gamma_{xy}+\varepsilon_{yy}\end{Bmatrix}$$



$$\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathbf{n_A}=\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy}\\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_{yy}\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \frac{1}{2}\gamma_{xy}\end{Bmatrix}$$

4）測定した値（スカラー）は，それぞれ方向のひずみベクトルの大きさなので，それぞれ法線ベクトルと内積をとる。

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathbf{n_A}\}\cdot\mathbf{n_A}=\varepsilon_A$$

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathbf{n_B}\}\cdot\mathbf{n_B}=\varepsilon_B$$

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathbf{n_C}\}\cdot\mathbf{n_C}=\varepsilon_C$$

5）上記の式を展開する。

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \frac{1}{2}\gamma_{xy}\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix}=\varepsilon_{xx}=\varepsilon_A$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}+\frac{1}{2}\gamma_{xy}\\ \frac{1}{2}\gamma_{xy}+\varepsilon_{yy}\end{Bmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}=\frac{1}{2}\left(\varepsilon_{xx}+\gamma_{xy}+\varepsilon_{yy}\right)=\varepsilon_B$$

$$\begin{Bmatrix}\frac{1}{2}\gamma_{xy}\\ \varepsilon_{yy}\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix}=\varepsilon_{yy}=\varepsilon_C$$

6）上記の三つの式から，三つの未知数を求める。

$$\varepsilon_{xx}=\varepsilon_A,\varepsilon_{yy}=\varepsilon_C,\gamma_{xy}=2\varepsilon_B-\left(\varepsilon_A+\varepsilon_C\right)$$

7）ひずみマトリックスを代入する。

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy}\\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_{yy}\end{bmatrix}=10^{-4}\begin{bmatrix}4 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$$

8）固有値を求めるため，以下の行列式で表す。

$$\left|\boldsymbol{\varepsilon}-\lambda\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right|=0$$

9）上記を展開して，解く。

$$\begin{vmatrix}4\cdot10^{-4}-\lambda & 2\cdot10^{-4}\\ 2\cdot10^{-4} & 1\cdot10^{-4}-\lambda\end{vmatrix}=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{matrix}\lambda_1=5\times10^{-4}\\ \lambda_2=0\end{matrix}$$

10）主ひずみ（最大，最小）が得られる。

$$\varepsilon_1=5\times10^{-4}\qquad\varepsilon_2=0$$

11）それぞれ固有値の固有ベクトルを求める。

$\lambda_1=5\times10^{-4}$ の固有ベクトル $\begin{Bmatrix}m_x\\ m_y\end{Bmatrix}$ を考える。

$$\left\{\boldsymbol{\varepsilon}-\lambda_1\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\}\cdot\begin{Bmatrix}m_x\\ m_y\end{Bmatrix}=10^{-4}\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 2 & -4\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}m_x\\ m_y\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}-m_x+2m_y\\ 2m_x-4m_y\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}$$

$$m_y=m_x/2$$

法線ベクトルの大きさは1なので，

$$m_x{}^2 + m_y{}^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad m_x{}^2 + \left(m_x/2\right)^2 = 1$$

$$\Downarrow$$

$$m_x = 2/\sqrt{5}, m_y = 1/\sqrt{5} \quad \text{か} \quad m_x = -2/\sqrt{5}, m_y = -1/\sqrt{5}$$

$\lambda_2 = 0$ の固有ベクトル $\begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix}$ を考える。

$$\left\{\boldsymbol{\varepsilon} - \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\} \cdot \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} = 10^{-4} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} = 0$$

$$\begin{Bmatrix} 4n_x + 2n_y \\ 2n_x + n_y \end{Bmatrix} = 0$$

$$n_y = -2n_x$$

$$n_x{}^2 + n_y{}^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad n_x{}^2 + \left(-2n_x\right)^2 = 1$$

$$\Downarrow$$

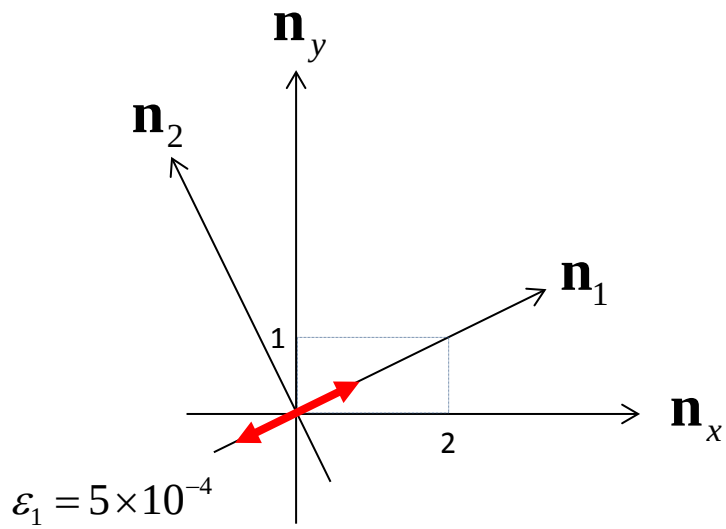
$$n_x = 1/\sqrt{5}, n_y = -2/\sqrt{5} \quad \text{か} \quad n_x = -1/\sqrt{5}, n_y = 2/\sqrt{5}$$

12）片方は正の軸，もう一方は負の軸を表すものなので，どちらにも使えるから，以下の図のように，主ひずみ軸が表示できる。

解答

主ひずみ軸 $\mathbf{n}_1 = \begin{Bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{Bmatrix}$

$$\mathbf{n}_2 = \begin{Bmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{Bmatrix}$$



宿題（試験問題2012年度）

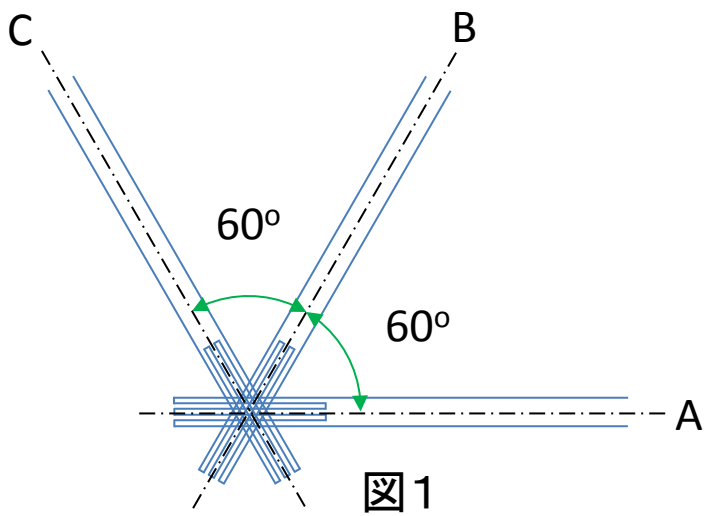


図1

図1に示すように，構造物に発生する2次元ひずみを測定するため、異なった方向にセットした3個のひずみゲージを試験片に貼る。ある荷重状態で以下のように等角ロゼットゲージの測定値（A方向、B方向、C方向）が得られた。主ひずみの大きさと方向を求めよ。

$\varepsilon_A = 1\times10^{-4}$, $\varepsilon_B = 0$, $\varepsilon_C = -1\times10^{-4}$