配布資料 6：情報不完備な 2 人戦略形ゲーム

1. $(N = \{1, 2\}, \{T^i\}_{i \in N}, \{A^i\}_{i \in N}, \{f^i\}_{i \in N}, \{p^i\}_{i \in N})$
   - N：プレイヤーの集合
   - T^i：プレイヤー i の タイプ の集合（有限）
   - A^i：プレイヤー i のとりうる行動（選択肢）の集合（有限）
   - $f^i : A = A^1 \times A^2 \times T^1 \times T^2 \to \Re$：プレイヤー i の利得関数
   - $p^i(t^j|t^i)$：プレイヤー i がタイプ t^i であるときに，プレイヤー j のタイプが t^j と考える（主観）確率

2. ベイジアンゲーム
   - タイプの全体 $T = T^1 \times T^2$ の上への 共有事前確率 p の導入
   - $(N = \{1, 2\}, \{T^i\}_{i \in N}, \{A^i\}_{i \in N}, \{f^i\}_{i \in N}, \{p^i\}_{i \in N}, p)$
   - $p^i(t^{*j}|t^{*i}) = p(t^{*i}, t^{*j}) / \sum_{t^j \in T^j} p(t^{*i}, t^j)$ （ベイズの公式）

3. ベイジアンナッシュ均衡とナッシュ均衡
   - プレイヤー i の戦略 $s^i : T^i \to A^i$ （自分のタイプに対して行動を決める）
   - （定義）戦略の組 (s^{*1}, s^{*2}) が ベイジアンナッシュ均衡

     $\Longleftrightarrow$
     - $\forall t^1 \in T^1$
       $$\sum_{t^2 \in T^2} f^1(s^{*1}(t^1), s^{*2}(t^2), t^1, t^2) p^1(t^2|t^1) \geq \sum_{t^2 \in T^2} f^1(a^1, s^{*2}(t^2), t^1, t^2) p^1(t^2|t^1) \quad \forall a^1 \in A^1$$
     - $\forall t^2 \in T^2$
       $$\sum_{t^1 \in T^1} f^2(s^{*1}(t^1), s^{*2}(t^2), t^1, t^2) p^2(t^1|t^2) \geq \sum_{t^1 \in T^1} f^2(s^{*1}(t^1), a^2, t^1, t^2) p^2(t^1|t^2) \quad \forall a^2 \in A^2$$
   - （定義）戦略の組 (s^{*1}, s^{*2}) が ナッシュ均衡

     $\Longleftrightarrow$
     - $\forall s^1 : T^1 \to A^1$
       $$\sum_{(t^1, t^2) \in T} f^1(s^{*1}(t^1), s^{*2}(t^2), t^1, t^2) p(t^1, t^2) \geq \sum_{(t^1, t^2) \in T} f^1(s^1(t^1), s^{*2}(t^2), t^1, t^2) p(t^1, t^2)$$
     - $\forall s^2 : T^2 \to A^2$
       $$\sum_{(t^1, t^2) \in T} f^2(s^{*1}(t^1), s^{*2}(t^2), t^1, t^2) p(t^1, t^2) \geq \sum_{(t^1, t^2) \in T} f^2(s^{*1}(t^1), s^2(t^2), t^1, t^2) p(t^1, t^2)$$
   - （定理）戦略の組 (s^{*1}, s^{*2}) がベイジアンナッシュ均衡

     $\leftrightarrow$　戦略の組 (s^{*1}, s^{*2}) がナッシュ均衡

4. （弱）完全ベイジアン均衡

- 展開形ゲーム $\Gamma = (K, P, p, U, h)$
- 信念(belief):$\forall u^i_\ell$, $i \in N$, $1 \le \ell \le k(i)$ について，$\mu : u^i_\ell \to [0,1]$ ただし，$\sum_{x \in u^i_\ell} \mu(x) = 1$
- 情報集合 u^i_ℓ における信念 $(\mu(x))_{x \in u^i_\ell}$ と行動戦略の組 $b = (b^i)_{i \in N}$ のもとでの期待利得
  - $x \in u^i_\ell$ から終点 $w \in W$ に到達する確率：$p(w|(x,b))$
  - $x \in u^i_\ell$ からスタートしたときの期待利得：$H^i(x,b) = \sum_{w \in W} p(w|(x,b)) h^i(w)$
  - u^i_ℓ からスタートしたときの期待利得：$H^i(u^i_\ell, b) = \sum_{x \in u^i_\ell} \mu(x) H^i(x,b)$
- 行動戦略の組 $b = (b^i)_{i \in N}$ が 情報集合 u^i_ℓ において逐次合理的
  $\leftrightarrow$ 任意の $b'^i_{u^i_\ell}$ に対して，$H^i(u^i_\ell, b) \ge H^i(u^i_\ell, (b'^i_{u^i_\ell}, b^{-i}))$ ここで，$b'^i_{u^i_\ell}$ は b^i の局所戦略を u^i_ℓ 以降の情報集合において変更した行動戦略を表す。
- 行動戦略の組 $b = (b^i)_{i \in N}$ が 逐次合理的
  $\leftrightarrow$ すべてのプレイヤー i について，行動戦略の組 $b = (b^i)_{i \in N}$ がすべての情報集合 u^i_ℓ において逐次合理的
- 行動戦略の組 $b = (b^i)_{i \in N}$ のもとで手番 x に到達する確率：$p(x|b)$
- 行動戦略の組 $b = (b^i)_{i \in N}$ のもとで情報集合 u^i_ℓ に到達する確率：$p(u^i_\ell|b) = \sum_{x \in u^i_\ell} p(x|b)$
- 信念 μ が行動戦略の組 $b = (b^i)_{i \in N}$ と 整合的：$p(u^i_\ell|b) > 0$ となる任意の情報集合 u^i_ℓ において，$\mu(x) = \frac{p(x|b)}{p(u^i_\ell|b)}$
- 行動戦略の組と信念の組 (b, μ) が （弱）完全ベイジアン均衡
  $\Longleftrightarrow$
  - 行動戦略の組 b が逐次合理的
  - 信念 μ が行動戦略の組 b と整合的

5. 定理：（弱）完全ベイジアン均衡はナッシュ均衡である.

6. 注意：

- 部分ゲーム完全均衡は必ずしも（弱）完全ベイジアン均衡にならない。
  （「ゲーム理論入門」135 ページ問題 1）
- （弱）完全ベイジアン均衡は必ずしも部分ゲーム完全均衡にはならない。（練習問題 3）
- （弱）完全ベイジアン均衡は弱支配される戦略を含むことがある.（練習問題 3）