配布資料 5：繰り返しゲーム
（参考文献 12「ゲーム理論」（岡田章著，有斐閣）205 − 232 ページ参照）

1. 繰り返しゲーム

   (a) 成分ゲーム（n 人戦略形ゲーム）

   - $G = (N = \{1, ..., n\}, \{X^i\}_{i\in N}, \{f^i\}_{i\in N})$
     - N：プレイヤーの集合
     - X^i：プレイヤー i の戦略の集合
     - $f^i : X = X^1 \times \ldots \times X^n \to \Re$ プレイヤー i の利得関数
     - 注意
       * $X^{-i} = X^1 \times \ldots \times X^{i-1} \times X^{i+1} \times \ldots \times X^n$
       * $x^{-i} = (x^1, \ldots, x^{i-1}, x^{i+1}, \ldots, x^n) \in X^{-i}$
   - 成分ゲームにおけるミニマックス行動
     成分ゲーム $G = (N, \{X^i\}_{i\in N}, \{f^i\}_{i\in N})$ において，

     $$max_{x^i} f^i(x^i, \hat{x}^{-i}) = min_{x^{-i}}(max_{x^i} f^i(x^i, x^{-i}))$$

     を満たす i 以外のプレイヤーの行動の組 $\hat{x}^{-i} = (\hat{x}^1, ..., \hat{x}^{i-1}, \hat{x}^{i+1}, ..., \hat{x}^n)$ を（i 以外のプレイヤーの）i に対する ミニマックス行動 という．$max_{x^i} f^i(x^i, \hat{x}^{-i})$ を i の ミニマックス利得 といい，v^i と書く．$v = (v^1, ..., v^n)$ を ミニマックス点 という．
   - 成分ゲームにおける個人合理的行動
     行動の組 $x = (x^1, ..., x^n)$ が 個人合理的$\leftrightarrow$ $f^i(x) \geq v^i \ \forall i = 1, ..., n$
     行動の組 $x = (x^1, ..., x^n)$ が 強く個人合理的$\leftrightarrow$ $f^i(x) > v^i \ \forall i = 1, ..., n$
   - 命題: G のナッシュ均衡を $e = (e^1, ..., e^n) \in X$ とすると，$f^i(e) \geq v^i \ \forall i = 1, ..., n$ である．

   (b) 有限回繰り返しゲーム G^T

   - 成分ゲーム G を有限回（T 回）繰り返す．各プレイヤーは過去のプレイを完全に知る．
   - プレイヤーの集合　N
   - 各プレイヤー i の戦略
     - $t-1$ 期目までの各プレイヤーの選択の結果をすべて知った上で，t 期目の選択を行う．
     - $X_{t-1} = X \times ... \times X$（$t-1$ 個）
       $X_0 = \{\emptyset\}$
     - $h_{t-1} = (x_1, ..., x_{t-1}) \in X_{t-1}$：$t-1$ 期目までの 履歴
     - i の t 期目の選択：$s^i_t : X_{t-1} \to X^i$
     - i の（純粋）戦略 $s^i = (s^i_t)^T_{t=1}$
     - i の戦略の全体 X^{Ti}，戦略の組 $(s^1, ..., s^n)$ の全体 $X^T = X^{T1} \times ... \times X^{Tn}$
   - 各プレイヤー i の利得
     - 戦略の組 $s = (s^1, ..., s^n)$ によって，各期の選択の組が以下のように定まる

- $x_1(s) = (s_1^1(\emptyset), ..., s_1^n(\emptyset))$
    - $x_2(s) = (s_2^1(x_1(s)), ..., s_2^n(x_1(s))$
    - $x_t(s) = (s_t^1(x_1(s), ..., x_{t-1}(s)), ..., s_t^n(x_1(s), ..., x_{t-1}(s))),\ t = 3, 4, ...$
  - 選択の組の列 $x(s) = (x_t(s))_{t=1}^T$ における各期の利得の割引因子 δ による 割引利得和

$$f^{Ti}(s) = \sum_{t=1}^{T} \delta^{t-1} f^i(x_t(s))$$

  - (平均利得　$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} f^i(x_t(s)))$
- 成分ゲーム G の割引因子 δ を持つ T 回繰り返しゲーム
  $G^T(\delta) = (N, \{X^{Ti}\}_{i\in N}, \{f^{T^i}\}_{i\in N})$
- 定理:毎回成分ゲームのナッシュ均衡を選択する戦略の組は T 回繰り返しゲームのナッシュ均衡になり，部分ゲーム完全均衡にもなる．
- 定理:成分ゲームが唯一つのナッシュ均衡 x^* を持つとする．このとき，T 回繰り返しゲームの部分ゲーム完全均衡 s^* は唯一つ存在し，$x(s^*) = (x^*, ..., x^*)$ である．

(c) 無限回繰り返しゲーム G^∞

- i の（純粋）戦略 $s^i = (s_t^i)_{t=1}^\infty$
- 選択の組の列 $x(s) = (x_t(s))_{t=1}^\infty$ における各期の利得の割引因子 δ $(0 < \delta < 1)$ による割引利得和 $\bar{f}^i(s) = \sum_{t=1}^\infty \delta^{t-1} f^i(x_t(s))$
- 正規化利得（平均利得）　$(1-\delta)\sum_{t=1}^\infty \delta^{t-1} f^i(x_t(s))$

(d) フォーク定理

- 無限回繰り返しゲームのナッシュ均衡
  $G^\infty(\delta)$ において，戦略の組 $s^* = (s^{*1}, ..., s^{*n}) \in \bar{X}$ が ナッシュ均衡
  $\leftrightarrow$ すべての $i = 1, ..., n$ に対して $\bar{f}^i(s^*) \geq \bar{f}^i(s, s^{*-i})\ \forall s^i \in \bar{X}^i$
- 定理（フォーク定理）:成分ゲーム G の強く個人合理的な任意の行動の組 $x = (x^1, ..., x^n)$ をとる．このとき，

$$\delta \geq \frac{max_{y^i} f^i(y^i, x^{-i}) - f^i(x)}{max_{y^i} f^i(y^i, x^{-i}) - v^i}\ \forall i = 1, ..., n$$

  が成り立つならば，繰り返しゲーム $G^\infty(\delta)$ のナッシュ均衡 $s^* = (s^{*1}, ..., s^{*n})$ が存在して $x(s^*) = (x, x, ...)$ が成り立つ．