配布資料２：２人戦略形ゲームにおける諸性質

1. 純粋戦略のみを考える場合

   (a) 合理化できる戦略と支配
   合理化できる戦略は，必ず支配される戦略の逐次的除去によって残った戦略に含まれる。

   (b) 合理化できる戦略とナッシュ均衡
   ナッシュ均衡を構成する戦略は，必ず合理化できる戦略に含まれる。

   (c) 支配戦略とナッシュ均衡
   プレイヤー1，2ともに支配戦略が存在すれば，その組は，純粋戦略の範囲においてこのゲームの狭義ナッシュ均衡でありこれ以外には，ナッシュ均衡は存在しない。
   証明：$s^1_{i^*}$，$s^2_{j^*}$ をそれぞれプレイヤー１，２の支配戦略とする。$s^1_{i^*}$ がプレイヤー1の支配戦略ゆえ，すべての $i=1,...,m$ に対して $a^1_{i^*j} > a^1_{ij}\ \forall j=1,...,n$. したがって，$j=j^*$ に対しても，すべての $i=1,...,m$ に対して $a^1_{i^*j^*} > a^1_{ij^*}$. プレイヤー2についても同様。したがって，$(s^1_{i^*}, s^2_{j^*})$ は純粋戦略の範囲において狭義ナッシュ均衡となる。これ以外にナッシュ均衡 $(s^1_{i'}, s^2_{j'})$ が存在したとする。$i' \neq i^*$ ないしは $j' \neq j^*$ である。$i' \neq i^*$ とすると，$s^1_{i^*}$ が支配戦略ゆえ，$a^1_{i^*j'} > a^1_{i'j'}$。したがって，$s^1_{i'}$ が $s^2_{j'}$ に対する最適反応戦略ではなく，これは $(s^1_{i'}, s^2_{j'})$ がナッシュ均衡であることに反する。$j' \neq j^*$ の場合も同様にして矛盾が導ける。（証明終）

   (d) 弱支配戦略とナッシュ均衡
   プレイヤー1，2ともに弱支配戦略が存在すれば，その組は，純粋戦略の範囲においてこのゲームのナッシュ均衡である。
   注意：唯一つのナッシュ均衡となるとは限らない。（「ゲーム理論入門」p.33 の表２－２）

   (e) 支配される戦略の逐次的除去とその順序
   支配される戦略を逐次的に除去する場合，最終的に残る戦略は，除去する順序に依存しない。
   注意：弱支配の場合には逐次的除去の順序により残る戦略が変わる。(支配，弱支配に関する講義のスライド）

   (f) 支配される戦略の逐次的除去とナッシュ均衡（１）
   支配される戦略の逐次的除去により，唯１つの戦略の組が残ったとすれば，この戦略の組は，純粋戦略の範囲においてこのゲームの狭義ナッシュ均衡でありこれ以外には，ナッシュ均衡は存在しない。（「演習ゲーム理論」p.15 定理 2.3，p.32 演習問題 2.8）
   証明：残った戦略の組を $(s^1_{i^*}, s^2_{j^*})$ とする。まず，$a^1_{i^*j^*} > a^1_{ij^*}\ \forall i=1,...,m,\ i \neq i^*$ を示す。任意の $i' \neq i^*$ をとる。$s^1_{i'}$ は除去されるから，これを支配する戦略が存在する。この戦略を $s^1_{i_1}$ とする。この支配が行なわれるときにプレイヤー2の戦略 $s^2_{j^*}$ は残って

いるから，$a^1_{i_1j^*} > a^1_{i'j^*}$ が成り立つ。もし，$i_1 = i^*$ であれば，$a^1_{i^*j^*} > a^1_{i'j^*}$ である。
そうでないとすると，$s^1_{i_1}$ を支配する戦略 $s^1_{i_2}$ が存在する。この支配が行なわれるときにもプレイヤー２の戦略 $s^2_{j^*}$ は残っているから，$a^1_{i_2j^*} > a^1_{i_1j^*} > a^1_{i'j^*}$ が成り立つ。もし，$i_2 = i^*$ であれば，$a^1_{i^*j^*} > a^1_{i'j^*}$ である。
そうでないとすると $s^1_{i_2}$ を支配する戦略 $s^1_{i_3}$ が存在する。以下この手続きを繰り返すと，プレイヤー１の戦略の数は有限個であるから，$i_\ell = i^*$ となる i_ℓ が必ず存在する。このとき，$a^1_{i^*j^*} = a^1_{i_\ell j^*} > a^1_{i_{\ell-1}j^*} > ... > a^1_{i_1j^*} > a^1_{i'j^*}$ である。
同様にして，$a^2_{i^*j^*} > a^2_{i^*j}\ \forall j = 1, ..., n,\ j \neq j^*$ も示すことができる。したがって，($s^1_{i^*}$, $s^2_{j^*}$) は狭義ナッシュ均衡である。
これ以外にナッシュ均衡が存在しないことの証明は (a) と同様。（証明終）

(g) 支配される戦略の逐次的除去とナッシュ均衡（２）
戦略の組が，純粋戦略の範囲においてナッシュ均衡であれば，各戦略が支配される戦略の逐次的除去により除去されることはない。
注意：弱支配される戦略の除去においては除去されることがある。（「ゲーム理論入門」p.33 の表２－２）

(h) 弱支配戦略の逐次的除去とナッシュ均衡
弱支配される戦略の逐次的除去により，唯１つの戦略の組 が残ったとすれば，この戦略の組は，純粋戦略の範囲においてこのゲームのナッシュ均衡である。
注意：唯一つのナッシュ均衡となるとは限らない。（「ゲーム理論入門」p.33 の表２－２）

(i) ナッシュ均衡とパレート最適性
ナッシュ均衡は必ずしもパレート最適にはならない。（「ゲーム理論入門」 事例２－１）
ナッシュ均衡がパレート最適になる場合もある。（「ゲーム理論入門」 事例２－２）

2. 混合戦略も含む場合

(a) 純粋戦略におけるナッシュ均衡
純粋戦略の範囲でナッシュ均衡となる戦略の組は，混合戦略まで考えてもナッシュ均衡である。
証明：純粋戦略の組 $(s^1_{i^*}, s^2_{j^*})$ がナッシュ均衡であるとする。
(1) $a^1_{i^*j^*} \geq a^1_{ij^*}\ \forall i = 1, ..., m$, (2) $a^2_{i^*j^*} \geq a^2_{i^*j}\ \forall j = 1, ..., n$ である。
(3) $a^1_{i^*j^*} = E^1(s^1_{i*}, s^2_{j^*}) \geq E^1(p^1, s^2_{j^*})\ \forall p^1 \in \Pi^1$,
(4) $a^2_{i^*j^*} = E^2(s^1_{i*}, s^2_{j^*}) \geq E^2(s^1_{i*}, p^2)\ \forall p^2 \in \Pi^2$ を示せばよい。
(3) は,
$$E^1(p^1, s^2_{j^*}) = \sum_{i=1}^m a^1_{ij^*} p^1_i \leq \sum_{i=1}^m a^1_{i^*j^*} p^1_i = a^1_{i^*j^*} \sum_{i=1}^m p^1_i = a^1_{i^*j^*}$$
より従う。ここで不等号は (1) より従う。(4) についても同様である。（証明終）

(b) 純粋戦略における支配戦略とナッシュ均衡
２人のプレイヤーそれぞれに純粋戦略における支配戦略があれば，その組は混合戦略

まで考えた場合にもただ１つのナッシュ均衡であり，狭義ナッシュ均衡である。

(c) 最適反応戦略における混合戦略と純粋戦略　（「演習ゲーム理論」p.15 定理 2.2）
ある混合戦略が相手のある戦略に対する最適反応戦略であれば，この混合戦略において正の確率で用いられている純粋戦略もすべて相手の戦略に対する最適反応戦略である。
証明：プレイヤー 1 の混合戦略 p^1 がプレイヤー 2 の混合戦略 p^2 に対する最適反応戦略であり，かつ $p^1_{i'} > 0$ であるとする。最適反応戦略であることより，$(1)E^1(p^1, p^2) \geq E^1(s^1_i, p^2)\ \forall i = 1, ..., m$ が成り立つ。
いま，$(2)E^1(s^1_{i'}, p^2) < E^1(p^1, p^2)$ と仮定すると，
$$
\begin{aligned}
E^1(p^1, p^2) &= \textstyle\sum_{i=1}^m E^1(s^1_i, p^2) p^1_i \\
&= \textstyle\sum_{i=1, i\neq i'}^m E^1(s^1_i, p^2) p^1_i + E^1(s^1_{i'}, p^2) p^1_{i'} \\
&< \textstyle\sum_{i=1, i\neq i'}^m E^1(p^1, p^2) p^1_i + E^1(p^1, p^2) p^1_{i'} \\
&= E^1(p^1, p^2) \textstyle\sum_{i=1}^m p^1_i = E^1(p^1, p^2)
\end{aligned}
$$
となり，矛盾が導かれる。ここで不等号は（1）と $p^1_i \geq 0\ \forall i = 1, ..., m$ および（2）と $p^1_{i'} > 0$ から従う。従って，$E^1(s^1_{i'}, p^2) = E^1(p^1, p^2)$ となり，$s^1_{i'}$ も最適反応である。（証明終）
注意：この定理から，少なくとも１人のプレイヤーが２つ以上の純粋戦略を正の確率で用いるようなナッシュ均衡は，狭義ナッシュ均衡とはなりえないことがわかる。

(d) 2 人ゲームにおいては，合理化できる戦略の集合と支配される戦略の逐次的除去によって残った戦略の集合は一致する。

3. ナッシュ均衡の存在証明　（「演習ゲーム理論」p.15 定理 2.1）

(a) Brouwer の不動点定理
　X を $\Re^k$（k 次元ユークリッド空間）における凸で有界な閉集合とし，ℓ を X から X への連続な写像とする。このとき，$\ell(x^*) = x^*$ となる X の点 x^*（不動点）が存在する。
（注意）「中間値の定理」　→　ℓ を $[0, 1]$ から $[0, 1]$ への連続な関数とすると，$\ell(x^*) = x^*$ となる $[0, 1]$ の点 x^*（不動点）が存在する。

(b) ２人戦略形ゲームにおいて，混合戦略の全体の直積 $\Gamma = \Pi^1 \times \Pi^2$ は $\Re^{m+n}$ における凸で有界な閉集合である。

(c) Γ から $\Re^{m+n}$ への写像 h を次のように定義する。
まず，各 $(p^1, p^2) \in \Gamma$ に対して，
$$d_i(p^1, p^2) = max(0, f^1(s^1_i, p^2) - f^1(p^1, p^2))\ \ \forall i = 1, \ldots, m$$
$$d_{m+j}(p^1, p^2) = max(0, f^2(p^1, s^2_j) - f(p^1, p^2))\ \ \forall j = 1, \ldots, n$$
とし，
$$h(p^1, p^2) = (h(p^1, p^2)_1, \ldots, h(p^1, p^2)_m, h(p^1, p^2)_{m+1}, \ldots, h(p^1, p^2)_{m+n})$$
$$h(p^1, p^2)_i = \frac{p^1_i + d_i(p^1, p^2)}{1 + \sum_{i=1}^m d_i(p^1, p^2)}\ \ \forall i = 1, \ldots, m$$
$$h(p^1, p^2)_{m+j} = \frac{p^2_j + d_{m+j}(p^1, p^2)}{1 + \sum_{j=1}^n d_{m+j}(p^1, p^2)}\ \ \forall j = 1, \ldots, n$$
とする。

(d) このとき，h は Γ から Γ への写像であり，かつ，f^1, f^2 の連続性から h は連続である。したがって，Brouwer の不動点定理から，$h(p^{*1}, p^{*2}) = (p^{*1}, p^{*2})$ となる $(p^{*1}, p^{*2}) \in \Gamma$ が存在する。

(e) 問題（１）h が Γ から Γ への写像であることを示せ。
<u>ヒント</u>:
$\sum_{i=1}^{m} h(p^{*1}, p^{*2})_i = 1$，$h_i(p^{*1}, p^{*2}) \geq 0\ \forall i = 1, ..., m,$
$\sum_{j=1}^{n} h(p^{*1}, p^{*2})_{m+j} = 1$，$h_{m+j}(p^{*1}, p^{*2}) \geq 0\ \forall j = 1, ..., n$ を示せばよい。

(f) 問題（２）(p^{*1}, p^{*2}) がナッシュ均衡となっていることを示せ。
<u>ヒント</u>

- $h(p^{*1}, p^{*2}) = (p^{*1}, p^{*2})$ ゆえ，$\frac{p_i^{*1} + d_i(p^{*1},\, p^{*2})}{1 + \sum_{i=1}^{m} d_i(p^{*1},\, p^{*2})} = p_i^{*1}\ \forall i - 1, ..., m$ が成り立ち，分母を払って整理すると，$(1) d_i(p^{*1}, p^{*2}) = p_i^{*1} \sum_{i=1}^{m} d_i(p^{*1}, p^{*2})\ \forall i = 1, ..., m$ が成り立つ。
- (1) を用いて $(2) d_i(p^{*1}, p^{*2}) = 0\ \forall i = 1, ..., m$ を示し，同様にして $(3) d_{m+j}(p^{*1}, p^{*2}) = 0\ \forall j = 1, ..., n$ を示せ。（背理法を用いよ。）
- (2)，(3) を用いて証明を完成せよ。