2014年度　論理回路理論　演習3　解答

学科：＿＿＿＿＿＿＿＿　学籍番号：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名：＿＿＿＿＿＿＿＿

1．論理関数 $L(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1)$ が線形関数である時，以下のように表現できる

$$L(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus \ldots \oplus a_n x_n$$

ただし,$a_i, i = 0, 1 \ldots, n$ の値は 1 もしくは 0 である．

また，線形関数は必ず自己双対関数か自己反双対関数のいずれかである．
以上の点を踏まえて，次の論理関数が線形であるか否かを，理由と共に示せ.

(1) $\bar{x}\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee xyz$　（15 点）

(2) $xy \vee \bar{y}\bar{z} \vee xz$　（15 点）

(3) $a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus a_3 x_3 \oplus a_0$ の <u>双対関数</u>　**（15 点）**

解答

(1)　与式を、

$$\begin{aligned}
\bar{x}\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee xyz &= z(\bar{x}\bar{y} \vee xy) \vee \bar{z}(x\bar{y} \vee \bar{x}y) \\
&= z(\overline{x \oplus y} \vee \bar{z}(x \oplus y)) \\
&= x \oplus y \oplus z
\end{aligned}$$

と、変形できるので、この関数は線形関数である。

(2)　$F(x,y,z) = xy \vee \bar{y}\bar{z} \vee xz$ と置き、その双対関数 $F_d(x,y,z)$ を求めると、

$$
\begin{aligned}
F_d(x,y,z) &= \overline{F(\bar{x},\bar{y},\bar{z})} \\
&= \overline{\bar{x}\bar{y} \vee yz \vee \bar{x}\bar{z}} \\
&= (x \vee y)(\bar{y} \vee \bar{z})(x \vee z) \\
&= x\bar{y} \vee x\bar{z}
\end{aligned}
$$

となるので，$F(x,y,z)$ と $F_d(x,y,z)$ のそれぞれについて真理値表を書くと，

x	y	z	$F(x,y,z)$	$F_d(x,y,z)$
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	0

となる．

従って，$F(x,y,z)$ は自己双対関数と自己反双対関数のいずれでもないため，線形関数ではない．

(3)　$F_d(x,y,z)$ を求めると、

$$
\begin{aligned}
F_d(x,y,z) &= \overline{F(\bar{x},\bar{y},\bar{z})} \\
&= \overline{a_3(x_3 \oplus 1) \oplus a_2(x_2 \oplus 1) \oplus a_1(x_1 \oplus 1) \oplus a_0} \\
&= a_3(x_3 \oplus 1) \oplus a_2(x_2 \oplus 1) \oplus a_1(x_1 \oplus 1) \oplus a_0 \oplus 1 \\
&= a_1x_1 \ \oplus a_2x_2 \oplus a_3x_3 \oplus a_3 \oplus a_2 \oplus a_1 \oplus a_0 \oplus 1
\end{aligned}
$$

と表現できるので，F_d は線形関数である．

３．n 個の論理変数のうち，t 個以上の論理変数が値 1 を取るときに限って，値が 1 となるような論理関数を n 変数閾値関数といい，t をその閾値という．
一般に閾値が T の n 変数閾値関数 $F(x_1, \cdots, x_n)$ の双対関数 $F_d(x_1, \cdots, x_n)$ も閾値関数となることが知られている．

この閾値が T の n 変数閾値関数 $F(x_1, \cdots, x_n)$ の双対関数 $F_d(x_1, \cdots, x_n)$ の閾値を，n, T を用いて理由とともに示せ． (20 点)

解答

論理関数 $F(x_1, \cdots, x_n)$ が閾値 T の閾値関数であるから，定義より n 個の論理変数 $x_1, \cdots, x_n$ のうち，値が 1 である変数の数が T 個以上であれば，F の値は 1 である．値が 1 の変数の数が $T-1$ 個以下であれば F の値は 0 である．
つまり，このことを値が 0 となる論理変数の数を用いて言い換えると，

(1-1) 値が 0 である変数の数が $n-T$ 個以下であれば，F の値は 1 である．
(1-2) 値が 0 である変数の数が $n-T+1$ 個以上であれば F の値は 0 である．

双対関数 $F_d(x_1, \cdots, x_n)$ は，元の論理関数 $F(x_1, \cdots, x_n)$ の論理変数 $x_1, \cdots, x_n$ の 0 と 1 を反転し，さらに論理関数の値の 0 と 1 を反転して得られるものであるから，上の (1-1)，(1-2) を次のように言い換えれば良い．

(2-1) 値が 1 である変数の数が $n-T$ 個以下であれば，F_d の値は 0 である．
(2-2) 値が 1 である変数の数が $n-T+1$ 個以上であれば，F_d の値は 1 である．

(2-2) より，閾値が T の n 変数閾値関数の双対関数の閾値は，$n-T+1$ である．

２．次の真理値表で表される論理関数を，カルノー図を用いて簡単化し，簡単化された NOT-AND-OR 形式の論理式を示せ．　（35 点）

x_5	x_4	x_3	x_2	x_1	$F(x_5, x_4, x_3, x_2, x_1)$
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0
0	0	0	1	0	1
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	0
0	1	0	0	0	1
0	1	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0
1	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1
1	1	0	1	1	0
1	1	1	0	0	1
1	1	1	0	1	1
1	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	0

尚，ここに定義されていない入力変数値に対する関数値はドントケアとする．

解答

カルノー図

x_5x_4 \ $x_3x_2x_1$	000	001	011	010	110	111	101	100
00	0	0	0	1	1	0	1	1
01	1	1	1	*	*	0	0	0
11	1	1	0	1	1	0	1	1
10	1	1	0	1	1	0	*	*

以上より，簡単化された論理式は，

$$F(x_5,x_4,x_3,x_2,x_1)=x_5\bar{x_2}\vee x_2\bar{x_1}\vee\bar{x_5}x_4\bar{x_3}\vee\bar{x_4}x_3\bar{x_2}$$

である．