2014年度　論理回路理論　演習２　解答

1. 次の関数を極小項表現と極大項表現でそれぞれ表せ。真理値表を用いても良い。

(1) $F_1(x,y,z) = \bar{x} \oplus yz$

(2) $F_2(x,y,z) = \overline{x\bar{y} \vee y\bar{z} \vee x\bar{z}}$

(3) $F_3(x,y,z) = M(\bar{x}, M(x,\bar{y},z), M(x,y,\bar{z}))$
ただし、$M(x,y,z) = xy \vee \bar{x}z$ とする

解答 (配点：極小項表現、極大項表現　各４点 × ６　計２４点)

表 1: 真理値表

x	y	z	$F_1(x,y,z)$	$F_2(x,y,z)$	$F_3(x,y,z)$	極小項	極大項
0	0	0	1	1	0	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	$x \vee y \vee z$
0	0	1	1	1	1	$\bar{x}\bar{y}z$	$x \vee y \vee \bar{z}$
0	1	0	1	0	0	$\bar{x}y\bar{z}$	$x \vee \bar{y} \vee z$
0	1	1	0	1	1	$\bar{x}yz$	$x \vee \bar{y} \vee \bar{z}$
1	0	0	0	0	0	$x\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x} \vee y \vee z$
1	0	1	0	0	0	$x\bar{y}z$	$\bar{x} \vee y \vee \bar{z}$
1	1	0	0	0	1	$xy\bar{z}$	$\bar{x} \vee \bar{y} \vee z$
1	1	1	1	1	1	xyz	$\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}$

(1) 極小項表現　$F_1(x,y,z) = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee xyz$
極大項表現　$F_1(x,y,z) = (x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)$

(2) 極小項表現　$F_2(x,y,z) = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee xyz$
極大項表現　$F_2(x,y,z) = (x \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)$

(3) 極小項表現　$F_3(x,y,z) = \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee xy\bar{z} \vee xyz$
極大項表現　$F_3(x,y,z) = (x \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})$

(補足)

(3)
$$\begin{aligned} F_3(x,y,z) &= M(\bar{x}, M(x,\bar{y},z), M(x,y,\bar{z})) \\ &= \bar{x}(x\bar{y} \vee \bar{x}z) \vee x(xy \vee \bar{x}\bar{z}) \\ &= \bar{x}z \vee xy \qquad \text{(分配法則)} \end{aligned}$$

２. 次の (1) と (2) の論理式を NAND のみを用いて表せ。また (3) と (4) の論理式を NOR のみを用いて表せ。ただし、いずれも三段以下の論理構成とすること。回路図を示す必要はない。
なお、NAND と NOR の表記法は以下の通りとする。

$$\begin{cases} NAND(x,y) = \overline{x \cdot y} \\ NOR(x,y) = \overline{x \vee y} \end{cases}$$

(解答例)
$$\bar{x} = \overline{x \cdot x} = NAND(x,x)$$
$$x \cdot \bar{y} = \overline{\overline{x \cdot \bar{y}}} = \overline{\bar{x} \vee y} = \overline{NOR(x,x) \vee y} = NOR(NOR(x,x),y)$$

(1) $(x \cdot \bar{y}) \vee \bar{z}$

(2) $x \oplus y$

(3) $\overline{x \cdot y}$

(4) $x \cdot (\bar{y} \vee z)$

解答 (配点：各６点 × ４　計２４点)

(1)
$$\begin{aligned} (x \cdot \bar{y}) \vee \bar{z} &= \overline{\overline{(x \cdot \bar{y}) \vee \bar{z}}} \\ &= \overline{\overline{x \cdot \bar{y}} \cdot z} \qquad \text{(ド・モルガンの定理)} \\ &= \overline{\overline{x \cdot NAND(y,y)} \cdot z} \\ &= \overline{NAND(x, NAND(y,y)) \cdot z} \\ &= NAND(NAND(x, NAND(y,y)), z) \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} x \oplus y &= (x \cdot \bar{y}) \vee (\bar{x} \cdot y) \\ &= \overline{\overline{(x \cdot \bar{y}) \vee (\bar{x} \cdot y)}} \\ &= \overline{\overline{x \cdot \bar{y}} \cdot \overline{\bar{x} \cdot y}} \qquad \text{(ド・モルガンの定理)} \\ &= \overline{\overline{x \cdot NAND(y,y)} \cdot \overline{NAND(x,x) \cdot y}} \\ &= \overline{NAND(x, NAND(y,y)) \cdot NAND(NAND(x,x), y)} \\ &= NAND(NAND(x, NAND(y,y)), NAND(NAND(x,x), y)) \end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned} \overline{x \cdot y} &= \bar{x} \vee \bar{y} \\ &= \overline{\overline{\bar{x} \vee \bar{y}}} \\ &= \overline{\overline{NOR(x,x) \vee NOR(y,y)}} \\ &= \overline{NOR(NOR(x,x), NOR(y,y))} \\ &= NOR(NOR(NOR(x,x), NOR(y,y)), NOR(NOR(x,x), NOR(y,y))) \end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned} x \cdot (\bar{y} \vee z) &= \overline{\overline{x \cdot (\bar{y} \vee z)}} \\ &= \overline{\bar{x} \vee \overline{\bar{y} \vee z}} \qquad \text{(ド・モルガンの定理)} \\ &= \overline{NOR(x,x) \vee \overline{NOR(y,y) \vee z}} \\ &= \overline{NOR(x,x) \vee NOR(NOR(y,y), z)} \\ &= NOR(NOR(x,x), NOR(NOR(y,y), z)) \end{aligned}$$

３. 次の論理式、$F_1(x,y,z)$、$F_2(x,y,z)$、$F_3(x,y,z)$ に関し、以下の真理値表を埋め、それらの Reed-Muller 展開を求めよ.

解答　　(8 点 × 3 問)

(1)$F_1(x,y,z) = xyz \vee \bar{x}y \vee \bar{x}\bar{y}z$

(2)$F_2(x,y,z) = xy \vee z(\bar{x} \vee \bar{y})$

(3)$F_3(x,y,z) = \overline{xy \vee \bar{x}z \vee x\bar{y}z}$

x	y	z	$F_1(x,y,z)$	$F_2(x,y,z)$	$F_3(x,y,z)$
0	0	0	0	0	1
0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	0
1	1	1	1	1	0

$$
\begin{aligned}
F(x,y,z) = (&F(0,0,0) \oplus F(0,0,1) \oplus F(0,1,0) \oplus F(0,1,1) \\
&\oplus F(1,0,0) \oplus F(1,0,1) \oplus F(1,1,0) \oplus F(1,1,1))xyz \\
&\oplus(F(0,0,0) \oplus F(0,1,0) \oplus F(1,0,0) \oplus F(1,1,0))xy \\
&\oplus(F(0,0,0) \oplus F(0,0,1) \oplus F(0,1,0) \oplus F(0,1,1))yz \\
&\oplus(F(0,0,0) \oplus F(0,0,1) \oplus F(1,0,0) \oplus F(1,0,1))zx \\
&\oplus(F(0,0,0) \oplus F(1,0,0))x \\
&\oplus(F(0,0,0) \oplus F(0,1,0))y \\
&\oplus(F(0,0,0) \oplus F(0,0,1))z \oplus F(0,0,0) \text{ に代入する}
\end{aligned}
$$

(1)$F_1(x,y,z) = y \oplus z \oplus xy \oplus yz \oplus zx$

(2)$F_2(x,y,z) = z \oplus xy \oplus xyz$

(3)$F_3(x,y,z) = 1 \oplus z \oplus xy \oplus xyz$

4. 論理代数方程式 $x \oplus \bar{a}b = 1$ の解 x を求めよ。また、その場合の解が存在するための必要十分条件を求めよ. また、可能な場合は式変形を施し、出来る限り簡単な形で解答せよ.

解答　　(5 点 × 5 問)

$$F(x) = \boxed{x \oplus \bar{a}b(\text{または } \bar{a}b\bar{x} \vee ax \vee \bar{b}x)}$$

とおけるので、

$$F(0) = \boxed{\bar{a}b}$$

$$F(1) = \boxed{a \vee \bar{b}}$$

となり、これを用いることにより、解が存在する為の必要十分条件は、

$$\boxed{\bar{a}b \vee a \vee \bar{b} = 1} \quad \cdots (*)$$

と表される。

この時、$(*)$ に留意して解を求める (必要ならば、任意の数を表す記号 α を用いて良い) と、

$$\boxed{a \vee \bar{b}}$$

となる。