確率と統計(O)
「連続型確率分布の例(第6章)」

■担当教員: 杉山 将(計算工学専攻)
■居室: W8E-406
■電子メール: sugi@cs.titech.ac.jp
■授業のウェブサイト:
http://sugiyama-www.cs.titech.ac.jp/~sugi/

講義計画(シラバス)

- 確率と統計の基礎
- 確率変数, 確率分布
- 積率, 積率母関数
- 離散型の確率分布の例
- 連続型の確率分布の例
- 確率不等式, 擬似乱数
- 多次元の確率分布
- 大数の法則, 中心極限定理
- 統計的推定, 仮説検定

主な連続型の確率分布

- 正規分布
- 一様分布
- ガンマ分布
- 指数分布
- ベータ分布
- コーシー分布

正規分布

- 正規分布(normal distribution)

$$\mu \in (-\infty, \infty)$$

$$\sigma > 0$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad \text{for } x \in (-\infty, \infty)$$

- ガウス分布(Gaussian distribution)とも呼ぶ.
- 独立な確率変数の平均の極限は正規分布に従う.

正規分布(続き)

- $f(x)$ が確率密度関数であることの証明
  - $f(x) \geq 0$ は明らか
  - 以下,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

を証明する. そのためにまず, 積分における変数変換の概念を復習する.

積分における変数変換(一変数)

$$\int_{\mathcal{X}} f(x)dx = \int_{\mathcal{R}} f(g(r))\frac{dx}{dr}dr \qquad \begin{aligned} x &= g(r) \\ \mathcal{X} &= g(\mathcal{R}) \end{aligned}$$

- 例: $f(x) = x, \ \mathcal{X} = [2, 3]$ のとき，左辺は

$$\int_{\mathcal{X}} f(x)dx = \int_2^3 xdx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_2^3 = \frac{5}{2}$$

次に $g(r) = r^2$に対して右辺を計算する.

$$\mathcal{R} = [\sqrt{2}, \sqrt{3}], \ f(g(r)) = r^2, \ \frac{dx}{dr} = 2r$$ なので，

$$\int_{\mathcal{R}} f(g(r))\frac{dx}{dr}dr = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} r^2 \cdot 2rdr = \left[\frac{1}{2}r^4\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} = \frac{5}{2}$$

積分における変数変換(二変数)

$$\int_{\mathcal{X}}\int_{\mathcal{Y}} f(x,y)dydx = \int_{\mathcal{R}}\int_{\Theta} f(g(r,\theta),h(r,\theta))|J|d\theta dr$$

$$x = g(r,\theta) \quad \mathcal{X} = g(\mathcal{R},\Theta)$$
$$y = h(r,\theta) \quad \mathcal{Y} = h(\mathcal{R},\Theta)$$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

J : ヤコビアン行列(Jacobian matrix)

$|J|$: ヤコビアン行列の行列式(ヤコビアン）の絶対値

- 三変数以上の場合も同様に計算できる

演習1

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$ の値を求めよ.

ヒント:

$$g(r,\theta) = r\cos\theta,\ \ h(r,\theta) = r\sin\theta$$

と変数変換する.

ガウス積分の公式

- 前頁の計算より，次のガウス積分(Gaussian integral)の公式を得る.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

- 証明:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx &= \sqrt{\left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right\}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right\}} \\
&= \sqrt{\left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right\}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy\right\}} \\
&= \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy} \\
&= \sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

正規分布(続き)

- $$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \text{ for } x \in (-\infty, \infty)$$

が $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ を満たすことを示す.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx \\
&= \frac{\sigma\sqrt{2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-r^2\right) dr \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$r = \frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}$$

$$dx = \sigma\sqrt{2}dr$$

正規分布の性質

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad \text{for } x \in (-\infty, \infty)$$

- 期待値:　$E(X) = \mu$
- 分散:　$V(X) = \sigma^2$
- 積率母関数:　$M_X(t) = \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$
- 期待値 μ，分散 σ^2 の正規分布を $N(\mu, \sigma^2)$ で表す

証明

- 積率母関数:

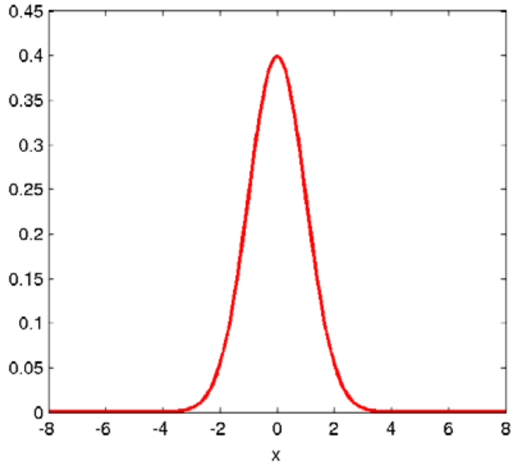
$$
\begin{aligned}
M_X(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} + tx\right) dx \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left\{x^2 - 2(\mu+\sigma^2 t)x + \mu^2\right\}\right) dx \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\left\{x-(\mu+\sigma^2 t)\right\}^2}{2\sigma^2} + \mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) dx \\
&= \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\left\{x-(\mu+\sigma^2 t)\right\}^2}{2\sigma^2}\right) dx}_{N(\mu+\sigma^2 t,\,\sigma^2)\text{ の確率密度関数の積分}(=1)} \\
&= \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)
\end{aligned}
$$

- 期待値と分散の証明は演習！

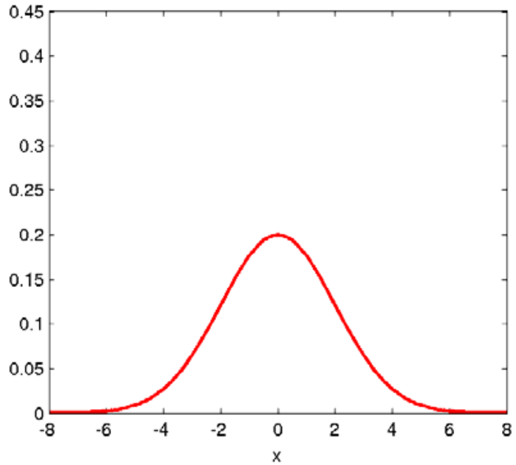
正規分布の例

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right)$$

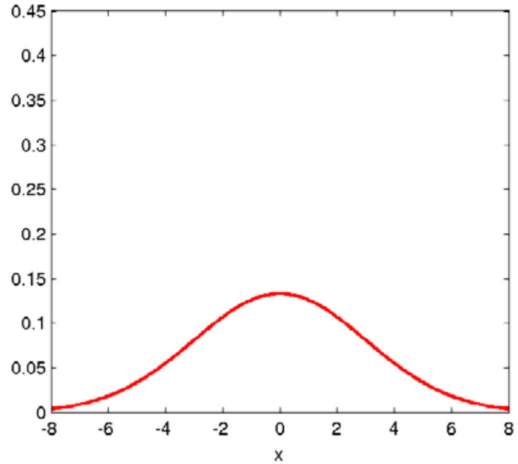
$$\mu = 0$$



$$\sigma = 1$$



$$\sigma = 2$$



$$\sigma = 3$$

正規分布の性質(続き)

- 一般に $E(X)=\mu,\ V(X)=\sigma^2$ のとき，X の線形変換 $Y=aX+b$ に対して

$$E(Y)=a\mu+b,\ \ V(Y)=a^2\sigma^2$$

- 更に X が正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ に従うとき，Y も正規分布に従う(証明は宿題)

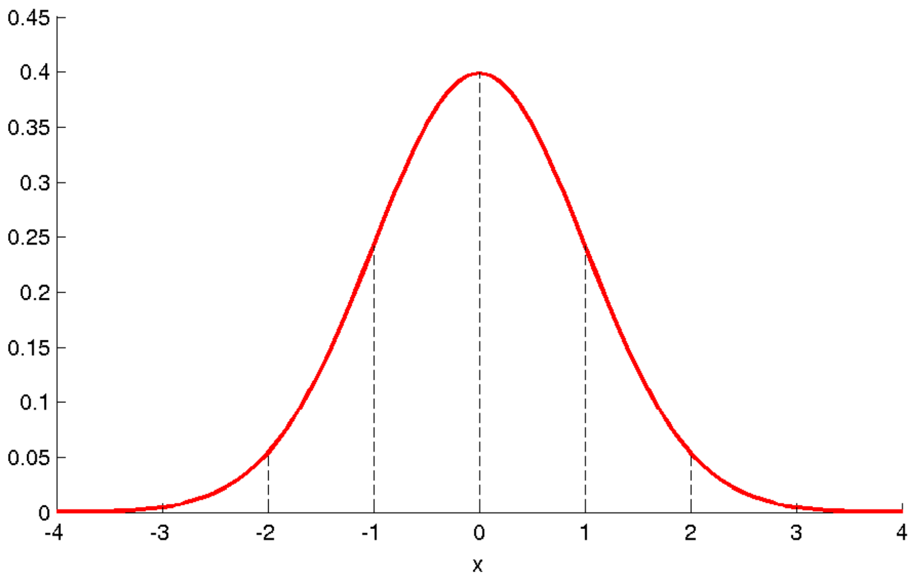
$$Y\sim N(a\mu+b,a^2\sigma^2)$$

従って，標準化変数 $Z=(X-\mu)/\sigma$ も正規分布に従う

$$Z\sim N(0,1)$$

- $N(0,1)$ を標準正規分布(standard normal distribution)と呼ぶ

標準正規分布



- $N(0,1)$ に対して,
  - [-1,1]の範囲に約68．27%
  - [-2,2]の範囲に約95．45%
  - [-3,3]の範囲に約99．73%

まとめ

- 連続分布
  - 正規分布
- ガウス積分

宿題

1. X の確率密度関数が $f(x)$， $X = t(Y)$ のとき，Y の確率密度関数 $g(y)$ が次式で与えられることを示せ．

$$g(y) = f(t(y))\frac{dt}{dy}$$

ヒント：確率密度関数の積分は1

2. X が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとき，その線形変換 $Y = aX + b$ は正規分布

$$N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$$

に従うことを証明せよ．

ヒント：Y の確率密度関数を調べよ