

2014年前期 無線通信システム

第9回 誤り訂正符号

荒木 純道 <araki@mobile.ee.>
2014年6月18日

講義スケジュール(後半)

	日付	教科書	内容
第8回	6月11日	4.4	フェーディングとダイバーシチ
第9回	6月18日	4.6	誤り訂正符号
第10回	6月25日	3.6、4.5	スペクトル拡散とRAKE受信
第11回	7月 2日	3.7	直交周波数分割多重 (OFDM)
第12回	7月 9日	6	アクセス制御
第13回	7月16日	7	IEEE802.11a WLAN
第14回	7月23日		予備日
第15回	7月30日		期末試験

2014年6月18日

誤り訂正符号

2

復習

■ フェーディング伝搬路における誤り率特性

$$P_{\text{eb}}(\gamma) = \frac{1}{2} \text{erfc}(\sqrt{\gamma}) \quad \Rightarrow \quad \bar{P}_{\text{eb}}(\bar{\gamma}) = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{\bar{\gamma}}{1+\bar{\gamma}}} \right)$$

■ 空間ダイバーシチ (アレー信号処理)

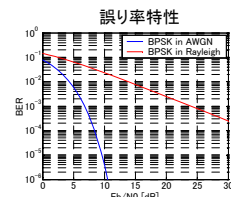
$$\mathbf{y} = \mathbf{h}\mathbf{s} + \mathbf{n}$$

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{w}^H \mathbf{y} = \mathbf{w}^H \mathbf{h}\mathbf{s} + \mathbf{w}^H \mathbf{n}$$

■ 最大比合成ダイバーシチの特性

$$\gamma_{\text{opt}} = \frac{|\mathbf{h}|^2 P}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^M |h_i|^2 P}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^M \gamma_i$$

$$\bar{P}_{\text{e}}(\bar{\gamma}) = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{\bar{\gamma}}{1+\bar{\gamma}}} \right)^M \sum_{i=0}^{M-1} \binom{M-1}{i} \left(\frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{\bar{\gamma}}{1+\bar{\gamma}}} \right) \right)^i$$



2014年6月18日

誤り訂正符号

3

講義内容

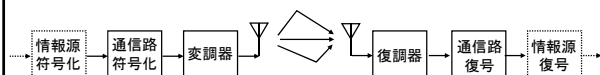
- 通信路符号器の構成
- 線形誤り訂正符号
- 畳込み符号
 - トレリス線図
 - 状態遷移と伝達関数
- 硬判定ビット復号と誤り率特性
- 軟判定ビット復号と誤り率特性
- パンクチュアとイレータ
- フェーディングとインターリーバ
- デモ

2014年6月18日

誤り訂正符号

4

符号化の種類



情報源符号化

メッセージの冗長性を取り除き情報を圧縮するための符号
(e.g. zip, mpeg, etc.)

通信路符号化

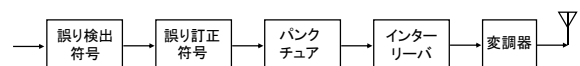
メッセージに冗長性を与え通信による情報誤りを防ぐための符号

2014年6月18日

誤り訂正符号

5

通信路符号器の構成



誤り検出符号

受信器において誤り検出するための符号
誤り検出後、再送制御を行う (ARQ)
(e.g. 偶奇パリティ, CRC)

パンクチュア

符号化率 (パリティの量) を
通信路の状態に合わせて
適応的に制御する方法

誤り訂正符号

符号語間距離を拡大することで
誤り訂正能力を持たせるための符号
(e.g. ブロック符号 (Hamming, Reed Solomon), 畳込み符号 (CC, Turbo))

インターリーバ

フェーディングの落ち込みによる
バースト誤りを防ぐための
ランダムイザ

2014年6月18日

誤り訂正符号

6

線形誤り訂正符号

(n, k) 符号化

メッセージ $\mathbf{m} = [m_1 \ m_2 \ \dots \ m_k]$

符号語 $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$

符号化率 $r = k/n$

線形符号

$$\mathbf{x}_i \oplus \mathbf{x}_j = \mathbf{x}_k$$

ハミング距離(符号語間距離)

$$\begin{aligned} \text{ham}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) &= \text{hamw}(\mathbf{x}_i \oplus \mathbf{x}_j) \\ &= \text{hamw}(\mathbf{x}_k) \end{aligned}$$

誤り訂正能力

$$d_{\min} = \min_{i,j} \text{ham}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \min_i \text{hamw}(\mathbf{x}_i)$$

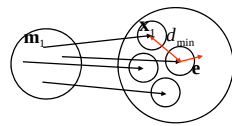
$$d_c = \left\lfloor \frac{1}{2}(d_{\min} - 1) \right\rfloor$$

2014年6月18日

誤り訂正符号

7

メッセージ $\mathbf{m}$ 符号語 $\mathbf{x}$



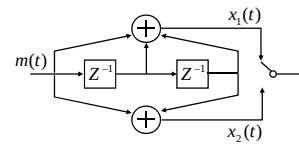
(3, 1) 繰返し符号の例

メッセージ 符号語
0 → 0 0 0
1 → 1 1 1 $r = 1/3$

最小距離 $d_{\min} = 3$

$$\text{訂正能力 } d_c = \left\lfloor \frac{1}{2}(3-1) \right\rfloor = 1$$

畳込み符号



符号化率 $r = 1/2$

拘束長 $K = 3$

生成多項式 $g_1 = 7, g_2 = 5$

入力	出力
0 0 0 0	00 00 00 00
0 1 0 0	00 11 10 11

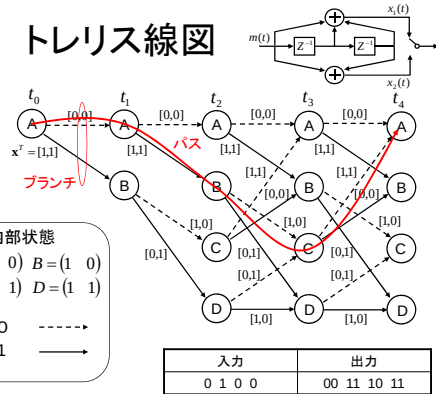
符号語間距離を拡大することで誤り耐性を持たせる

2014年6月18日

誤り訂正符号

8

トレリス線図



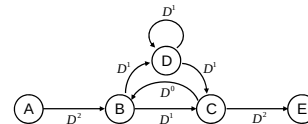
2014年6月18日

誤り訂正符号

9

状態遷移と伝達関数

状態遷移図



伝達関数

$$\begin{aligned} X_B &= D^2 X_A + X_C \\ X_C &= D X_B + D X_D \\ X_D &= D X_B + D X_D \\ X_E &= D^2 X_C \end{aligned}$$

$$T(D) = \frac{X_E}{X_A} = \frac{D^5}{1-2D}$$

$$= D^5 + 2D^6 + 4D^7 + \dots + 2^{d-d_{\min}} D^d + \dots$$

最小自由距離 $d_{\min} = 5$

$$\text{誤り訂正能力 } d_c = \left\lfloor \frac{d_{\min} - 1}{2} \right\rfloor$$

2014年6月18日

誤り訂正符号

10

硬判定ビタビ復号

受信信号(デジタル)

$$\mathbf{r}(t) = [r_1(t), r_2(t)]^T$$

ブランチメトリック

$$b_{AA}(t) = \text{ham}(\mathbf{r}(t), \mathbf{x}_{AA})$$

$$b_{AC}(t) = \text{ham}(\mathbf{r}(t), \mathbf{x}_{AC})$$

$$\text{ham}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_i a_i \oplus b_i$$

パスメトリック

$$p_{AA}(t) = p_A(t-1) + b_{AA}(t)$$

$$p_{AC}(t) = p_C(t-1) + b_{AC}(t)$$

生き残りパス

$$p_A(t) = \min[p_{AA}(t), p_{AC}(t)]$$

パスメトリック最小

$$\hat{m}(t) = \arg \min[p_A(t), p_B(t), p_C(t), p_D(t)]$$

復号系列

2014年6月18日

誤り訂正符号

11

硬判定ビタビ復号の例(後向き)

メッセージ

$\mathbf{m} = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$

テールビット

$[0 \ 0]$

符号語

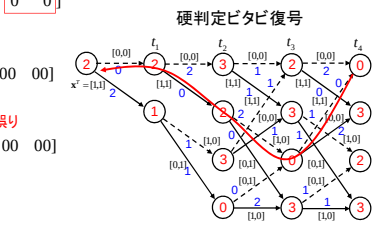
$\mathbf{x} = [00 \ 11 \ 10 \ 11 \ 00 \ 00]$

受信信号

$\mathbf{r} = [00 \ 11 \ 01 \ 11 \ 00 \ 00]$

復号結果

$\hat{\mathbf{m}} = [0 \ 1 \ 0 \ 0]$



2014年6月18日

誤り訂正符号

12

誤り率特性(硬判定)

符号語距離

$$d = \text{ham}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$$

ペアワイズ誤り率

$$P_2(d) = \sum_{k=d_{\min}}^d \binom{d}{k} P_e^k (1-P_e)^{d-k}$$

$$P_e = \frac{1}{2} \text{erfc}(\sqrt{\gamma}) \quad \text{if BPSK}$$

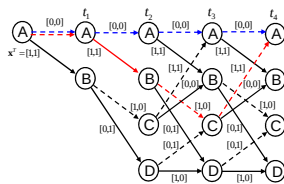
$$d_c = \left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor$$

符号誤り率

$$P_e < \sum_{d=d_{\min}}^{\infty} 2^{d-d_{\min}} P_2(d)$$

$$\mathbf{x}_1 = [00 \ 00 \ 00 \ 00]$$

$$\mathbf{x}_2 = [00 \ 11 \ 10 \ 11]$$



2014年6月18日

誤り訂正符号

13

軟判定ビタビ復号

硬判定前受信信号

$$\tilde{\mathbf{r}}(t) = [\tilde{r}_1(t), \tilde{r}_2(t)]^T$$

ブランチメトリック

$$b_{AA}(t) = \text{euc}(\tilde{\mathbf{r}}(t), \tilde{\mathbf{x}}_{AA})$$

$$b_{AC}(t) = \text{euc}(\tilde{\mathbf{r}}(t), \tilde{\mathbf{x}}_{AC})$$

$$\tilde{b}_{AA}(t) = \tilde{\mathbf{r}}(t) \cdot \tilde{\mathbf{x}}_{AA}$$

$$\tilde{b}_{AC}(t) = \tilde{\mathbf{r}}(t) \cdot \tilde{\mathbf{x}}_{AC}$$

パスメトリック

$$p_{AA}(t) = p_A(t-1) + \tilde{b}_{AA}(t)$$

$$p_{AC}(t) = p_C(t-1) + \tilde{b}_{AC}(t)$$

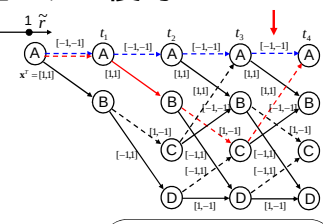
生き残りパス

$$p_A(t) = \max[p_{AA}(t), p_{AC}(t)]$$

パスメトリック最大

$$\hat{m}(t) = \arg \max[p_A(t), p_B(t), p_C(t), p_D(t)]$$

復号系列



軟判定基準

$$\text{euc}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_i \sqrt{|a_i - b_i|^2}$$

$$= \sum_i \sqrt{a_i^2 - 2a_i b_i + b_i^2}$$

$$\min[\text{euc}(\mathbf{a}, \mathbf{b})] = \max[\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}]$$

2014年6月18日

誤り訂正符号

14

軟判定ビタビ復号の例(後向き)

メッセージ

$$\mathbf{m} = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

テールビット

符号語

$$\mathbf{x} = [-1 \ -1 \ 11 \ 1 \ -1 \ 11 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1]$$

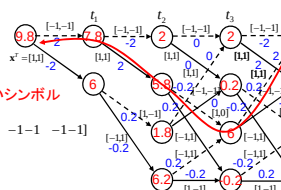
受信信号

$$\mathbf{r} = [-1.1 \ -0.9 \ 1.10.9 \ (-0.10.1) \ 1.10.9 \ -1 \ -1 \ -1]$$

復号結果

$$\hat{\mathbf{m}} = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

軟判定ビタビ復号



2014年6月18日

誤り訂正符号

15

誤り率特性(軟判定)

符号語距離

$$d = \text{ham}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$$

ペアワイズ誤り率

$$P_2(d) = P(p_2 > p_1)$$

$$= P\left(\sum_i \tilde{\mathbf{r}}(t_i) \cdot (\tilde{\mathbf{x}}_2(t_i) - \tilde{\mathbf{x}}_1(t_i)) > 0\right)$$

$$= P\left(\sum_i 2\tilde{\mathbf{r}}(t_i) > 0\right)$$

$$P_2(d) = \frac{1}{2} \text{erfc}(\sqrt{\gamma d}) \quad \text{if BPSK}$$

符号誤り率

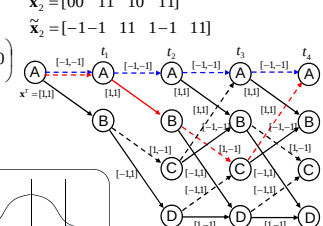
$$P_e < \sum_{d=d_{\min}}^{\infty} 2^{d-d_{\min}} P_2(d)$$

$$\mathbf{x}_1 = [00 \ 00 \ 00 \ 00]$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_1 = [-1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1]$$

$$\mathbf{x}_2 = [00 \ 11 \ 10 \ 11]$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_2 = [-1 \ -1 \ 11 \ 1 \ -1 \ 11]$$



2014年6月18日

誤り訂正符号

16

パンクチュア

入力

$$m(1), m(2)$$

畳込み出力

$$x_1(1), x_1(2)$$

$$x_2(1), x_2(2)$$

パンクチュア

$$z(1), z(2), z(3) = x_1(1), x_2(1), x_2(2)$$

K	$r = \frac{1}{2}$		$r = \frac{2}{3}$		$r = \frac{3}{4}$		$r = \frac{4}{5}$	
	P	$d_{\min}$	P	$d_{\min}$	P	$d_{\min}$	P	$d_{\min}$
3	1 1	5	10 11	3	101 110	3	1011 1100	2
7	1 1	10	11 10	6	110 101	5	1111 1000	4

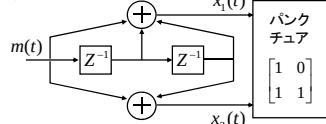
2014年6月18日

誤り訂正符号

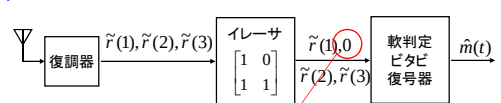
17

イレーサ

パンクチュア



イレーサ



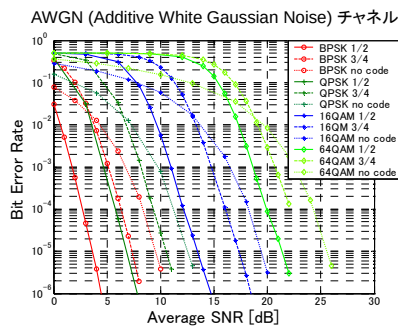
符号間距離に影響を与えない中性シンボルを挿入

2014年6月18日

誤り訂正符号

18

ビット誤り率特性

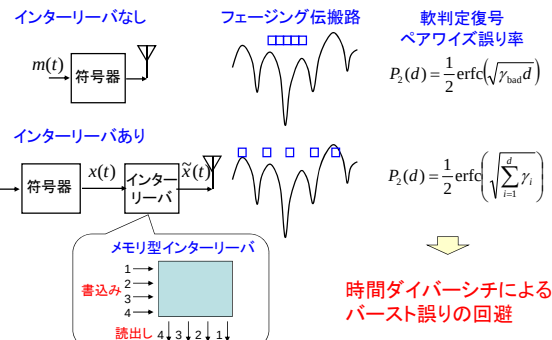


2014年6月18日

誤り訂正符号

19

インターリーバ

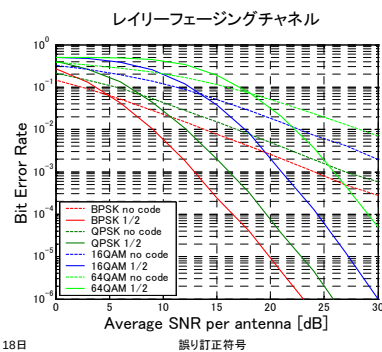


2014年6月18日

誤り訂正符号

20

フェージング環境における誤り率特性



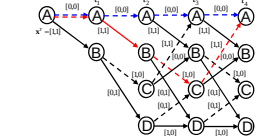
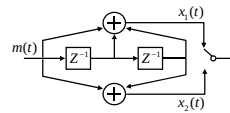
2014年6月18日

誤り訂正符号

21

まとめ

■ 畳込み符号とビタビ復号



■ 復号後誤り率特性

$$P_e < \sum_{d=d_{\min}}^{\infty} 2^{d-d_{\min}} P_2(d)$$

$$\text{硬判定: } P_2(d) = \sum_{k=d+1}^d \binom{d}{k} P_e^k (1-P_e)^{d-k}$$

$$\text{軟判定: } P_2(d) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma d})$$

■ インターリーバと時間ダイバーシティ

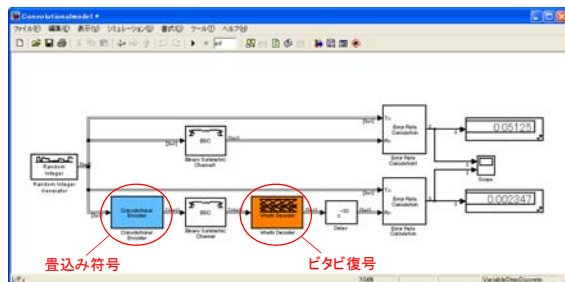
$$\text{時間ダイバーシティによるバースト誤りの回避} \quad P_2(d) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\sum_{i=1}^d \gamma_i} \right)$$

2014年6月18日

誤り訂正符号

22

デモ



2014年6月18日

誤り訂正符号

23