

## 9. 結合回路

### 9.1 マジック T

- 可逆回路であるから散乱行列は次のようになる

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} \end{bmatrix} \quad (9.1)$$

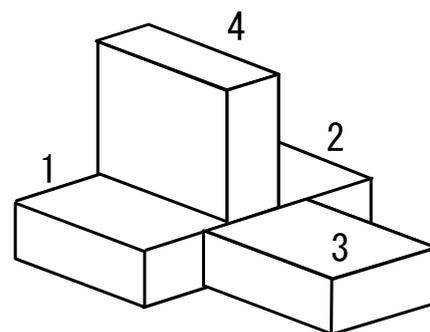


Fig. 9.1 導波管マジック T

- 構造の対称性より次の関係が成り立つ

$$S_{13} = S_{23} \quad (\text{ポート } 3 \rightarrow 1 \text{ とポート } 3 \rightarrow 2 \text{ は同等})$$

$$S_{11} = S_{22}$$

- ポート 4 からの入力は、ポート 1 と 2 に逆位相で出力される（電界の方向が上下逆）

$$S_{14} = -S_{24}$$

- 各導波管では  $TE_{10}$  モードだけが伝搬する。ポート 3 とポート 4 の伝搬モード( $TE_{10}$ )は、空間的に互いに直交しているため、ポート 3 から接合部に入力する電磁界がポート 4 の導波管には入力されない。つまり、ポート 3 とポート 4 は互いに結合しない。

$$S_{34} = S_{43} = 0$$

- ポート 3 とポート 4 は互いに結合していないので、独立に整合をとることができる

$$S_{33} = S_{44} = 0$$

以上のことを反映させると、散乱行列は次のようになる。

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & S_{11} & S_{13} & -S_{14} \\ S_{13} & S_{13} & 0 & 0 \\ S_{14} & -S_{14} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.2)$$

この回路に無損失性を条件として課すと、次の関係式が得られる。

$$|S_{11}|^2 + |S_{12}|^2 + |S_{13}|^2 + |S_{14}|^2 = 1 \quad (9.3.a)$$

$$2|S_{13}|^2 = 1 \quad (9.3.b)$$

$$2|S_{14}|^2 = 1 \quad (9.3.c)$$

これらの関係式から、ただちに次の結論が得られる。

$$S_{13} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j\phi}$$

$$S_{14} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j\theta}$$

$$S_{11} = S_{12} = 0$$

ポート 3 及び 4 の参照面は、いずれも自由に選ぶことができる。ここで、 $\theta = \phi = 0$  となるように参照面を選べば、散乱行列は次のようになる。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.4)$$

## 9.2 方向性結合器

- ・可逆回路なので散乱行列  $\mathbf{S}$  は対称行列
- ・入力ポートで反射は無視できると仮定する  
→ 散乱行列の対角要素=0
- ・方向性=隣接するポート間の結合はない  
→  $S_{12}=S_{34}=0$

以上の条件を課すと、散乱行列  $\mathbf{S}$  は次のようになる。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & S_{13} & S_{14} \\ 0 & 0 & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 \\ S_{14} & S_{24} & 0 & S_{44} \end{bmatrix} \quad (9.5)$$

この回路が無損失であるとする、次の関係式が成り立つ。

$$|S_{13}|^2 + |S_{14}|^2 = 1 \quad (9.6.a)$$

$$|S_{23}|^2 + |S_{24}|^2 = 1 \quad (9.6.b)$$

$$|S_{13}|^2 + |S_{23}|^2 + |S_{33}|^2 = 1 \quad (9.6.c)$$

$$|S_{14}|^2 + |S_{24}|^2 + |S_{44}|^2 = 1 \quad (9.6.d)$$

$$S_{13}S_{23}^* + S_{14}S_{24}^* = 0 \quad (9.6.e)$$

$$S_{13}S_{33}^* = 0 \quad (9.6.f)$$

$$S_{14}S_{44}^* = 0 \quad (9.6.g)$$

$$S_{23}S_{33}^* = 0 \quad (9.6.h)$$

$$S_{24}S_{44}^* = 0 \quad (9.6.i)$$

$$S_{13}S_{14}^* + S_{23}S_{24}^* = 0 \quad (9.6.j)$$

式(9.6.c)と式(9.6.d)を辺々加えると、次の関係式を得る。

$$|S_{13}|^2 + |S_{14}|^2 + |S_{23}|^2 + |S_{24}|^2 + |S_{33}|^2 + |S_{44}|^2 = 2$$

式(9.6.a)と式(9.6.b)を用いれば

$$|S_{33}|^2 + |S_{44}|^2 = 0$$

すなわち

$$S_{33} = S_{44} = 0$$

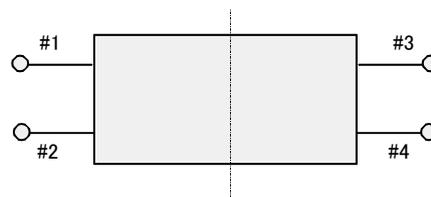


Fig.9.2 4ポート回路

式(9.6.c)で  $|S_{33}|^2 = 0$  から

$$|S_{13}|^2 + |S_{23}|^2 = 1$$

式(9.6.a)及び式(9.6.b)と比較すると、次の関係を得る。

$$|S_{14}| = |S_{23}|, \quad |S_{13}| = |S_{24}|$$

一つの可能性として  $S_{13}=S_{24}=\alpha$  (実数)とおくと、式(9.6.e)より、 $S_{23}^*=-S_{14}$  となる。ここで、 $S_{14} = j\beta$  (ただし  $\beta$  は実数)とおけば、 $S_{23} = -S_{14}^* = j\beta$  となる。すなわち、回路は二軸対称性をもつ (式(9.6.a)より  $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ )。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha & j\beta \\ 0 & 0 & j\beta & \alpha \\ \alpha & j\beta & 0 & 0 \\ j\beta & \alpha & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.7)$$

特に  $\alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$  の場合、3dB ハイブリッドとなる。

### 9.3 ストリップ線路によるハイブリッドの設計

ストリップ線路でハイブリッドを設計する方法を説明する。まず、1軸対称回路でハイブリッドを構成することを考え、一軸対称回路の解析法として偶奇励振について説明する。その結果、偶奇励振した場合の反射係数と透過係数から一軸対称回路の散乱行列を定めることができることを明らかにする。

この方法を使って、回路が所期の散乱行列をもつように、ストリップ線路の特性アドミタンスを決定する。

#### 9.3.1 偶奇励振による一軸対称回路の解析

可逆回路を考えることとして、散乱行列  $S$  は対称行列とする。

回路が一軸対称をもつ場合、 $S_{11}=S_{22}$ ,  $S_{44}=S_{33}$ ,  $S_{31}=S_{42}$ ,  $S_{41}=S_{32}$  であり、散乱行列は次の形になる。

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{21} & S_{31} & S_{41} \\ S_{21} & S_{11} & S_{41} & S_{31} \\ S_{31} & S_{41} & S_{33} & S_{43} \\ S_{41} & S_{31} & S_{43} & S_{33} \end{bmatrix} \quad (9.8)$$

次のように偶奇励振によって、この回路の特性を解析することができる。すなわち、ポート1のみから入力を与えると  $S_{11}$ ,  $S_{21}$ ,  $S_{31}$ ,  $S_{41}$  が決まるが、これを次のようにポート1とポート2から同時に入力を加えたものとみなす。

$$\begin{aligned} \text{ポート 1 : } 1 &\leftarrow \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \text{ポート 2 : } 0 &\leftarrow \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &\quad \text{偶励振} \quad \text{奇励振} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{21} & S_{31} & S_{41} \\ S_{21} & S_{11} & S_{41} & S_{31} \\ S_{31} & S_{41} & S_{33} & S_{43} \\ S_{41} & S_{31} & S_{43} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \quad (9.9)$$

(i) 偶励振  $\rightarrow a_1 = a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 、 $a_3 = a_4 = 0$  より

$$b_1 = b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(S_{11} + S_{21}), \quad b_3 = b_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(S_{31} + S_{41}) \text{ から、}$$

$$\Gamma_e = \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = S_{11} + S_{21} \quad (9.10.a)$$

$$T_e = \frac{b_3}{a_1} = \frac{b_4}{a_2} = S_{31} + S_{41} \quad (9.10.b)$$

(ii) 奇励振  $\rightarrow a_1 = -a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 、 $a_3 = a_4 = 0$  より

$$b_1 = -b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(S_{11} - S_{21}), \quad b_3 = -b_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(S_{31} - S_{41}) \text{ から}$$

$$\Gamma_o = \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = S_{11} - S_{21} \quad (9.11.a)$$

$$T_o = \frac{b_3}{a_1} = \frac{b_4}{a_2} = S_{31} - S_{41} \quad (9.11.a)$$

式(9.10)及び(9.11)から、回路の散乱行列要素  $S_{ij}$  と反射係数  $\Gamma$  及び透過係数  $T$  の関係は次のようになる。

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{2}(\Gamma_e + \Gamma_o) \\ S_{21} &= \frac{1}{2}(\Gamma_e - \Gamma_o) \\ S_{31} &= \frac{1}{2}(T_e + T_o) \\ S_{41} &= \frac{1}{2}(T_e - T_o) \end{aligned} \quad (9.12)$$

偶励振、奇励振した場合、4 開口回路は各励振に対応した 2 開口回路に置き換えられる。各 2 開口回路について反射係数  $\Gamma_i$  と透過係数  $T_i$  ( $i=e$  or  $o$ ) を求めれば (2 開口回路なので容易)、式(9.12)から 4 開口回路の  $[S]$  を求めることができる。

### 9.3.2 2 開口回路の反射係数と透過係数

2 開口回路の  $F$  行列がわかると、反射係数  $\Gamma$  と透過係数  $T$  は、次のようにして求めることができる。

まず、 $F$  行列の定義から、Fig. 9.3 の電圧、電流の関係は次の式で与えられる。

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_3 \\ I_3 \end{pmatrix}$$

ここで、右側のポートにインピーダンス  $Z_c$  を接続すると  $\frac{V_3}{I_3} = Z_c$  であるから、左側のポートから見込むインピーダンスは次式で与えられる。

$$Z_1 = \frac{V_1}{I_1} = \frac{AV_3 + BI_3}{CV_3 + DI_3} = \frac{AZ_c + B}{CZ_c + D}$$

これを用いると、回路の反射係数  $\Gamma$  と透過係数  $T$  は、それぞれ次のように求まる。

$$\Gamma = \frac{Z_1 - Z_c}{Z_1 + Z_c} = \frac{A + \frac{B}{Z_c} - CZ_c - D}{A + \frac{B}{Z_c} + CZ_c + D} \quad (9.13.a)$$

$$T = \frac{V_3 - Z_c(-I_3)}{V_1 + Z_c I_1} = \frac{2}{A + \frac{B}{Z_c} + CZ_c + D} \quad (9.13.b)$$

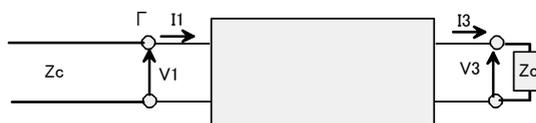


Fig.9.3 2 開口回路における反射係数、透過係数算出モデル

### 9.3.3 スタブ形ハイブリッド

Fig.9.4 のストリップ線路を考える。ここで、 $a$ 、 $b$  は線路の規格化アドミタンスである。

ポート 2 とポート 3 を偶励振、奇励振した場合、元の 4 開口回路は Fig.9.5 の等価回路で考える。すなわち、ポート 1 とポート 2 を偶励振した場合は回路の対称面は開放端、奇励振した場合は短絡端で置換えられる。

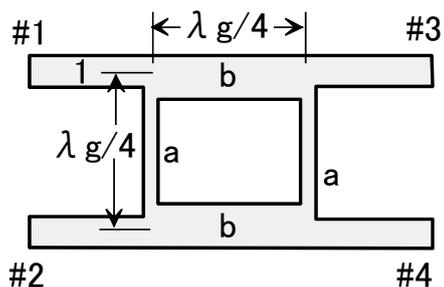


Fig.9.4 ストリップ線路形ハイブリッド

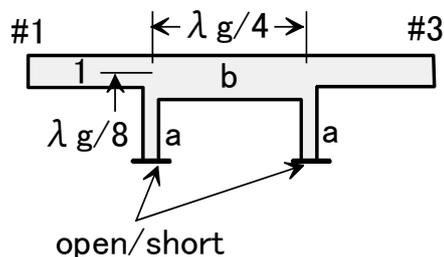


Fig. 9.5 偶・奇励振の等価回路

Fig. 9.5 の等価回路で、長さ  $\frac{\lambda_g}{8}$  のスタブ（終端開放又は短絡）、長さ  $\frac{\lambda_g}{4}$  の線路は、それぞれ

次の  $F$  行列をもつ。

1) 開放（短絡）スタブ

$$\begin{aligned} V_1 &= V_2 \\ I_1 &= \frac{V_2}{z} + I_2 \end{aligned}$$

より、回路の  $F$  行列は次のようになる。

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{z} & 1 \end{pmatrix}$$

ここで、終端開放、短絡の場合で  $z$  は次の式で与えられる。

$$\text{open} : z = -jz_c = -j\frac{1}{a} \quad (\because \beta l = \frac{\pi}{4}) \quad (9.14.a)$$

$$\text{short} : z = jz_c = j\frac{1}{a} \quad (9.14.b)$$

2) 特性アドミタンス  $b$ 、長さ  $\frac{\lambda_g}{4}$  の線路

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta l & j\frac{1}{b} \sin \beta l \\ j b \sin \beta l & \cos \beta l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

$\beta l = \frac{\pi}{2}$  として、 $F$  行列は次のように求まる。

$$F = \begin{pmatrix} 0 & j\frac{1}{b} \\ j b & 0 \end{pmatrix} \quad (9.15)$$

以上のことから、偶励振及び奇励振の場合の 2 開口回路の  $F$  行列は次のようになる。

偶励振

$$[F_e] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ j a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & j\frac{1}{b} \\ j b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ j a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{a}{b} & j\frac{1}{b} \\ j\left(b - \frac{a^2}{b}\right) & -\frac{a}{b} \end{pmatrix} \quad (9.16.a)$$

奇励振

$$[F_o] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -j a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & j\frac{1}{b} \\ j b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -j a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{b} & j\frac{1}{b} \\ j\left(b - \frac{a^2}{b}\right) & \frac{a}{b} \end{pmatrix} \quad (9.16.b)$$

この結果を用いれば、次のように反射係数  $\Gamma$  及び透過係数  $T$  が求まる。

$$\Gamma_e = \frac{j\left(\frac{1}{b} - b + \frac{a^2}{b}\right)}{-\frac{2a}{b} + j\left(\frac{1}{b} + b - \frac{a^2}{b}\right)}, \quad T_e = \frac{2}{-\frac{2a}{b} + j\left(\frac{1}{b} + b - \frac{a^2}{b}\right)} \quad (9.17.a)$$

$$\Gamma_o = \frac{j\left(\frac{1}{b} - b + \frac{a^2}{b}\right)}{\frac{2a}{b} + j\left(\frac{1}{b} + b - \frac{a^2}{b}\right)}, \quad T_o = \frac{2}{\frac{2a}{b} + j\left(\frac{1}{b} + b - \frac{a^2}{b}\right)} \quad (9.17.b)$$

方向性結合器となる条件として  $S_{11}=S_{21}=0$  を課すと  $\Gamma_e = \Gamma_o = 0$ 。これから、 $1+a^2 = b^2$  となり、  
 $S_{31} = -j\frac{1}{b}, S_{41} = -\frac{a}{b}$  となる。

3dB ハイブリッドは  $|S_{31}| = |S_{41}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$  であるから、 $a=1, b=\sqrt{2}$  とすればよい。

このとき、もとの4開口回路の散乱行列は、次のようになる。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & j\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & j\frac{1}{\sqrt{2}} \\ j\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & j\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.18)$$