

8.共振回路

電圧源 E 、インピーダンス Z_1 、 Z_2 の直列回路に流れる電流は次の式で表される。

$$I = \frac{E}{Z_1 + Z_2} \quad (8.1)$$

ここで、 $Z_1 + Z_2 = 0$ の状態を考えると電流は $I = \infty$ になる。これを共振とよぶ。アドミタンス Y_1 、 Y_2 で考えれば、 $Y_1 + Y_2 = 0$ も同様に共振回路となる。

【重要】

回路は任意の場所で 2 つに分割して考えることができる。

回路の内部構造は問わない。

8.1.伝送線路による共振回路

8.1.1 両端短絡

特性抵抗 R_c 、長さ l の伝送線路を終端短絡すると、見込むインピーダンスは $Z_{in} = jR_c \tan \beta l$ となる。両端短絡の伝送線路を用いた共振回路は、次のようになる。

(i)共振条件

長さ l_1 と l_2 の伝送線路を接続して共振器を形成する場合、共振条件 $Z_1 + Z_2 = 0$ より

$$\begin{aligned} R_c (\tan \beta l_1 + \tan \beta l_2) &= 0 \\ \tan \beta (l_1 + l_2) &= \frac{\tan \beta l_1 + \tan \beta l_2}{1 - \tan \beta l_1 \tan \beta l_2} = 0 \\ \beta (l_1 + l_2) &= m\pi \end{aligned} \quad (8.2)$$

すなわち、両端を短絡した伝送線路の長さを次のように選べば共振回路になる。

$$\therefore l_1 + l_2 = m \frac{\lambda}{2} \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (8.3)$$

例えば、周波数 $f=300\text{MHz}$ に対しては最短 $l_1 + l_2 = 50\text{cm}$ で、周波数 $f=30\text{GHz}$ の場合には最短 $l_1 + l_2 = 5\text{mm}$ で共振器が形成できる。

(ii)電圧・電流分布

無損失伝送線路上の電圧と電流の分布は、次の式で与えられる。

$$\begin{aligned} V(y) &= V_i e^{j\beta y} + V_r e^{-j\beta y} \\ I(y) &= \frac{1}{R_c} (V_i e^{j\beta y} - V_r e^{-j\beta y}) \end{aligned}$$

ここで、終端 $y=0$ で $V=0$ という短絡条件は $V_i = -V_r$ であるから

$$\begin{aligned} \therefore V(y) &= V_i (e^{j\beta y} - e^{-j\beta y}) = 2jV_i \sin \beta y \\ I(y) &= \frac{V_i}{R_c} 2 \cos \beta y \end{aligned} \quad (8.4)$$

したがって、電圧・電流の瞬時値は次のように定まる。

$$\begin{aligned} \therefore v(y, t) &= \sqrt{2} \operatorname{Re} [V(y) e^{j\omega t}] = 2\sqrt{2} V_i \sin \beta y \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \\ i(y, t) &= 2\sqrt{2} \frac{V_i}{R_c} \cos \beta y \cos \omega t \end{aligned} \quad (8.5)$$

一般的に、共振器内部の非縮退モードについて、次のことが言える。

- ・電界（電圧）は、共振器中で空間的に位相は一様である。
- ・磁界（電流）と電界（電圧）の間には 90 度の位相差がある。

いずれも伝送線路を伝搬する電磁界とは異なる振る舞いであることに注意する必要がある。

8.1.2 両端開放

終端開放線路を見込むインピーダンスは、次の式で与えられる。

$$Z_{in} = -jR_c \cot \beta l \quad (8.6)$$

両端短絡の場合と同様に、共振条件 $Z_1 + Z_2 = 0$ より共振条件は次のようになる。

$$l_1 + l_2 = m \frac{\lambda}{2} \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (8.7)$$

マイクロストリップ線路では、基板の表裏にある導体間を短絡する場合、基板に穴をあけなくては行けない。したがって、短絡終端より端部開放で形成する方が共振器を作りやすい。ただし、端部効果のため、導体の長さを実効的な線路長に差が生ずることに注意が必要。

8.2. リング共振器

- ・伝送線路でループを形成し、外部回路とは結合器を介して結合させる。
- ・ループ中に進行波を励振することで共振器が形成できる。共振条件は、ループを一周した電磁波が同位相で重ね合わさることである。すなわち、ループの長さが波長の整数倍 $n\lambda$ となることである。
- ・リング共振器は、マイクロ波、ミリ波、光波で、特定の周波数（波長）成分を分離する分波器や特定の周波数成分の伝達を阻止する帯域阻止フィルタとして応用される。

8.4 共振回路の Q 値

(1) Q の定義

Q (Quality factor) の定義は、共振周波数を f_0 (角周波数 ω_0) として、次の式で与えられる。

$$Q = 2\pi f_0 \frac{L}{R} = \frac{\frac{1}{2} 2\pi f_0 L |I_0|^2}{\frac{1}{2} R |I_0|^2} = \omega_0 \frac{\text{インダクタンに蓄積される最大エネルギー}}{\text{1周期の消費エネルギー}} \quad (8.8)$$

共振時には、共振器内部に蓄えられるエネルギーは電界的エネルギーと磁界的エネルギーの間を時間的に行ったり来たりする。したがって、導体損失のみが損失要因となる場合には、Q は次式で求まる。

$$Q = \omega_0 \frac{\frac{\mu}{2} \iiint |H|^2 dv}{\frac{R_s}{2} \iint |\mathbf{i}|^2 dS} \quad (8.9)$$

ここで、

$$R_s = \frac{1}{\sigma \delta} \quad (\delta: \text{表皮厚}): \text{表面抵抗}$$

$$|\mathbf{i}| = |\mathbf{H}_t| \quad (\mathbf{H}_t: \text{磁界の導体壁面に接する成分})$$

[例]

両端短絡線路の共振器で考えてみる。電圧・電流分布は、無損失の線路と同じ電圧・電流で近似する。

$$\begin{aligned}\therefore V(y) &= 2jV_i \sin \beta y = jV_0 \sin \beta y \\ I(y) &= \frac{V_i}{Z_c} 2 \cos \beta y = I_0 \cos \beta y\end{aligned}\quad (8.10)$$

伝搬方向の長さ dy の微小区間のインダクタンスに蓄えられるエネルギーは次の式で与えられる。

$$dW_L = \frac{1}{2} |I_0|^2 \cos^2 \beta y L dy \quad (8.11)$$

また、線路の抵抗分 Rdy 、 Gdy で消費されるエネルギーは次の式で与えられる。

$$dW = \frac{1}{2} |I_0|^2 \cos^2 \beta y R dy + \frac{1}{2} |V_0|^2 \sin^2 \beta y G dy \quad (8.12)$$

共振条件 $\beta l = m\pi$ を利用して、インダクタンスに蓄えられる全エネルギー W_L 、共振器長 l にわたって消費されるエネルギー W を計算すると、それぞれ次のようになる。

$$\begin{aligned}W_L &= \int_0^l \frac{1}{2} |I_0|^2 \cos^2 \beta y dy = \frac{L}{2} |I_0|^2 \frac{l}{2} \\ W &= \frac{R}{2} |I_0|^2 \frac{l}{2} + \frac{G}{2} |V_0|^2 \frac{l}{2}\end{aligned}\quad (8.13)$$

したがって、この共振器の Q 値は次の式で表される。

$$Q = \omega_0 \frac{L}{R + G \frac{|V_0|^2}{|I_0|^2}} = \omega_0 \frac{L}{R + G |Z_c|^2} \quad (8.14)$$

ここで、線路の損失が小さい（共振器を形成することが目的なので損失の小さい線路を用いる）場合には、特性インピーダンスと伝搬定数は次のように近似できる。

$$\begin{aligned}Z_c &= \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \approx \sqrt{\frac{L}{C}} \\ \gamma &= \alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \approx \sqrt{-\omega^2 LC + j\omega(LG + RC)} \\ &\approx j\omega\sqrt{LC} \left(1 - j \frac{1}{2\omega} \left(\frac{G}{C} + \frac{R}{L} \right) \right) = \frac{\sqrt{LC}}{2} \left(\frac{G}{C} + \frac{R}{L} \right) + j\omega\sqrt{LC} \\ \therefore \alpha &= \frac{\sqrt{LC}}{2} \left(\frac{G}{C} + \frac{R}{L} \right), \beta = \omega\sqrt{LC}\end{aligned}\quad (8.15)$$

したがって、両端短絡線路で共振器を形成した場合の Q 値は次の式で与えられる。

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R + G \frac{L}{C}} = \frac{\omega_0}{\frac{R}{L} + \frac{G}{C}} = \frac{\omega_0}{2\alpha} = \frac{\beta_0}{2\alpha} \quad (8.16)$$

(2)外部 Q

共振回路単体の Q を Q_0 （無負荷 Q ）、回路全体の Q を Q_t とすると、定義より、

$$Q_t = \frac{\omega_0 L}{R + R_{ext}} \quad (8.17)$$

$$\frac{1}{Q_t} = \frac{R}{\omega_0 L} + \frac{R_{ext}}{\omega_0 L} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_{ext}}$$

$$Q_{ext} \equiv \frac{\omega_0 L}{R_{ext}} > 0 : \text{外部}Q \quad (8.18)$$

$$\frac{1}{Q_t} > \frac{1}{Q_0}$$

つまり、外部回路の損失 R_{ext} により、回路全体の Q は劣化する。

(3) 選択度と共振器の Q

選択度 S は、中心周波数 f_0 と 3dB 帯域半値全幅 B により、次の式で定まる。

$$S = \frac{f_0}{B}$$

例えば LCR 直列共振回路を考えると、電流 I の周波数変化は、共振回路の Q と次の関係がある。

$$\left| \frac{I}{I_0} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}} \quad (8.19)$$

ここで、 $x = \frac{f}{f_0}$ は中心（共振）周波数で規格化した周波数を表す。

帯域幅 B は $\left| \frac{I}{I_0} \right| > \frac{1}{\sqrt{2}}$ なる周波数範囲で定義されるので、 $S=Q$ となる。

8.5. 共振器のフィルタへの応用

(1) 共振器の接続

2つの共振器を接続用線路を介して接続する。接続用線路を適当に選ぶと、共振特性が先鋭化する。

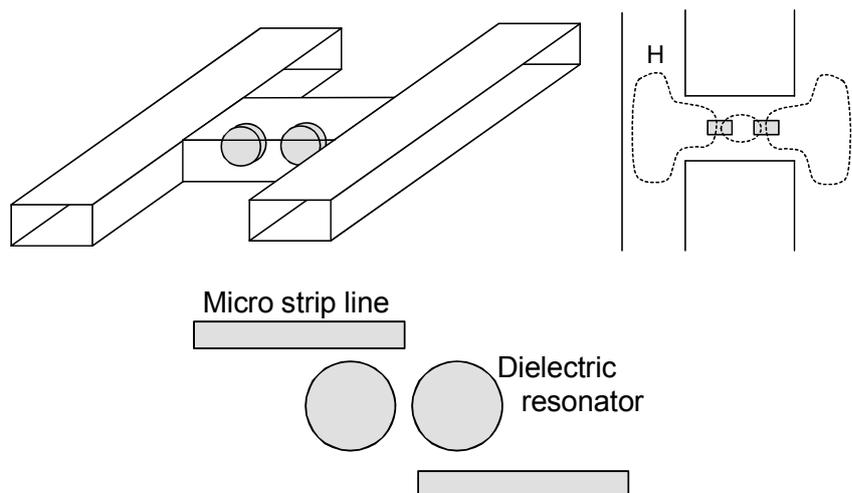


Fig.8.2 共振器の結合

(2)帯域阻止

共振回路を伝送線路に結合させると、特定の周波数の電磁波が共振器と結合し（共振器の中で損失され）、伝送線路の伝達が阻止される。すなわち、帯域阻止フィルタとして機能する。

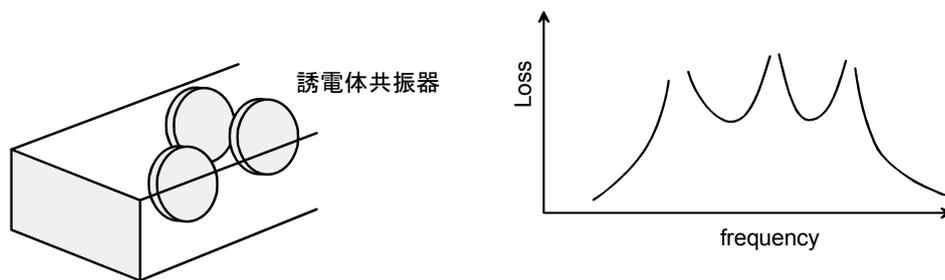


Fig.8.3 誘電体共振器の並列接続