5.誘電体導波路

$\mu_r = 1$の誘電体導波路を考える。このとき、次の関係がある。

$\varepsilon_r = n^2$ （n ：屈折率)

5.1.誘電体スラブ導波路の伝搬定数決定方程式

二次元導波路では伝搬定数の厳密解が得られる。

$n_1 > n_2, n_3$とする。n_1とn_2及びn_1とn_3の境界における電磁界接線成分の連続条件から、次のようにして特性方程式が導出される。

(a) TE モード（E_x, H_y, H_z）

スラブ導波路ではx方向に変化がないので$\partial/\partial x = 0$となる。また、z 方向に伝搬するとして、z 方向依存性は$e^{-j\beta z}$とおけば、マクスウェルの方程式は次のように書き下すことができる。

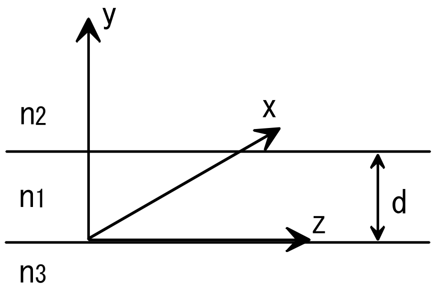

Fig.5.1 誘電体スラブ導波路

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} + j\beta H_y = j\omega\varepsilon E_x \quad (5.1.a)$$

$$-j\beta H_x = j\omega\varepsilon E_y \quad (5.1.b)$$

$$-\frac{\partial H_x}{\partial y} = j\omega\varepsilon E_z \quad (5.1.c)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} + j\beta E_y = -j\omega\mu_0 H_x \quad (5.2.a)$$

$$-j\beta E_x = -j\omega\mu_0 H_y \quad (5.2.b)$$

$$-\frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega\mu_0 H_z \quad (5.2.c)$$

(5.1.a)、(5.2.b)、(5.2.c)を整理すると、次の波動方程式を得る。((5.1.b)、(5.1.c)、(5.2.a)とは独立)

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + (\omega^2\varepsilon\mu_0 - \beta^2)E_x = 0 \quad (5.3)$$

(5.3)の解として、E_xは次のようにおくことができる。ただし、境界$y = 0, d$においてE_x（電界の接線成分）が連続になるように各領域の係数を選んでいる。

$$E_x = \begin{cases} (A\cos ud + B\sin ud)e^{-w_2(y-d)} & : \quad y \geqq d \\ A\cos uy + B\sin uy & : \quad d \geqq y \geqq 0 \\ Ae^{w_3 y} & : \quad 0 \geqq y \end{cases} \quad (5.4)$$

$$\mathrm{w}_2 = \sqrt{\beta^2 - n_2^2\omega^2\varepsilon_0\mu_0} = \sqrt{\beta^2 - n_2^2 k_0^2}$$
$$\mathrm{u} = \sqrt{n_1^2\omega^2\varepsilon_0\mu_0 - \beta^2} = \sqrt{n_1^2 k_0^2 - \beta^2}$$
$$\mathrm{w}_3 = \sqrt{\beta^2 - n_3^2\omega^2\varepsilon_0\mu_0} = \sqrt{\beta^2 - n_3^2 k_0^2}$$
$$k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

さらにもう一つの境界条件“境界 $y = 0, d$ に接する磁界成分 $H_z = \dfrac{1}{j\omega\mu_0}\dfrac{\partial E_x}{\partial y}$ が連続”であることを課し、係数 A、B がともにゼロになることが無いことから、次の特性方程式が導かれる。

$$\tan ud = \frac{u(w_2 + w_3)}{u^2 - w_2 w_3} \qquad (5.5)$$

(b)TM モード（H_x, E_y, E_z）

同様に、(5.1.b)、(5.1.c)、(5.2.a)を用いると次の特性方程式が導かれる。

$$\tan ud = \frac{\dfrac{u}{n_1^2}\left(\dfrac{w_2}{n_2^2} + \dfrac{w_3}{n_3^2}\right)}{\left(\dfrac{u}{n_1^2}\right)^2 - \dfrac{w_2}{n_2^2}\dfrac{w_3}{n_3^2}} \qquad (5.6)$$

ここで、TE モード（(5.1.a)、(5.2.b)、(5.2.c)で決まる）と TM モード（((5.1.b)、(5.1.c)、(5.2.a)で決まる)は、互いに独立に存在する。

(c)対称スラブ導波路

特別な場合として、$n_2 = n_3$ の場合は、

$$\tan 2u\frac{d}{2} = \frac{2uw}{u^2 - w^2} = \frac{2\dfrac{w}{u}}{1 - \left(\dfrac{w}{u}\right)^2} \qquad \text{(TE mode)} \qquad (5.7)$$

$$w = w_2 = w_3$$

より、次式を得る。

$$\tan^2\frac{ud}{2} + \left(\frac{u}{w} - \frac{w}{u}\right)\tan\frac{ud}{2} - 1 = 0$$
$$\left(\tan\frac{ud}{2} - \frac{w}{u}\right)\left(\tan\frac{ud}{2} + \frac{u}{w}\right) = 0$$

したがって、特性方程式は次の２式に分離することができる。

$$\tan\frac{ud}{2} = \frac{w}{u} \qquad \text{(even mode)} \qquad (5.8.a)$$

$$\tan\frac{ud}{2} = -\frac{u}{w} \qquad \text{(odd mode)} \tag{5.8.b}$$

5.2.単一モード条件

式(5.5)は次のように変形できる。

$$\tan ud = \frac{\dfrac{w_2}{u} + \dfrac{w_3}{u}}{1 - \dfrac{w_2}{u}\dfrac{w_3}{u}}$$

$$ud = \tan^{-1}\frac{w_2}{u} + \tan^{-1}\frac{w_3}{u} + m\pi \tag{5.9}$$

ここで、$n_2 = n_3$ の場合は $\mathrm{w}_2 = \mathrm{w}_3 = \mathrm{w} = \sqrt{\beta^2 - n_2^2 k_0^2}$ として

$$u\frac{d}{2} = \tan^{-1}\frac{w}{u} + \frac{\pi}{2}m$$

すなわち、

$$\sqrt{n_1^2 k_0^2 - \beta^2}\,\frac{d}{2} = \tan^{-1}\frac{\sqrt{\beta^2 - n_2^2 k_0^2}}{\sqrt{n_1^2 k_0^2 - \beta^2}} + \frac{\pi}{2}m \tag{5.10}$$

これを次のように変形する。

$$\sqrt{n_1^2 k_0^2 - \beta^2} = k_0\sqrt{n_1^2 - \frac{\beta^2}{k_0^2}} = k_0\sqrt{\left(n_1^2 - n_2^2\right) + n_2^2 - \frac{\beta^2}{k_0^2}} = k_0\sqrt{n_1^2 - n_2^2}\sqrt{1 - \frac{\dfrac{\beta^2}{k_0^2} - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2}}$$

$$\frac{\sqrt{\beta^2 - n_2^2 k_0^2}}{\sqrt{n_1^2 k_0^2 - \beta^2}} = \frac{\sqrt{\dfrac{\dfrac{\beta^2}{k_0^2} - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2}}}{\sqrt{1 - \dfrac{\dfrac{\beta^2}{k_0^2} - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2}}}$$

ここで、規格化伝搬定数を $b = \dfrac{\dfrac{\beta^2}{k_0^2} - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2}$ で定めると、$n_2 k_0 < \beta < n_1 k_0$ であるから、規格化伝搬定数は $0 < b < 1$ の範囲の値をとりえる。規格化伝搬定数を用いて、式(5.10)は次のように整理できる。

$$\frac{d}{2}k_0\sqrt{n_1^2 - n_2^2}\sqrt{1 - b} = \tan^{-1}\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{1 - b}} + \frac{\pi}{2}m \tag{5.11}$$

式(5.11)の根 b は、左辺と右辺の交点として求まる。$0 < b < 1$ に対して、$\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{1-b}}$ は $0 < \tan^{-1}\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{1-b}} < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で変化するので、式(5.11)が $m = 0$ 以外に根を持たない条件は、

$\dfrac{d}{2}k_0\sqrt{n_1^2-n_2^2}<\dfrac{\pi}{2}$ となる（式(5.11)の左辺の最大値が $\dfrac{\pi}{2}$ より大きくならない条件)。すなわち、これが $n_2=n_3$ の対称スラブ導波路中を一つのモードだけが伝搬可能な条件（単一モード条件）となる。

ここで、$V=\dfrac{d}{2}k_0\sqrt{n_1^2-n_2^2}$ は、導波路の V 値（V パラメータ）と呼ばれる。

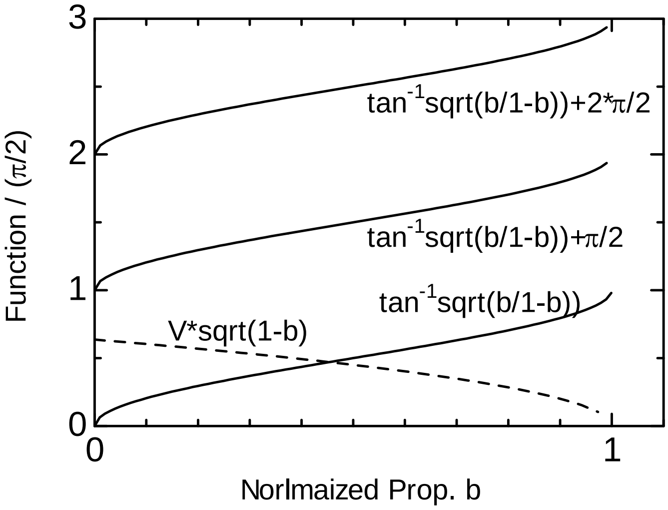

Fig.5.2　対称スラブ導波路（TE モード）の特性方程式の解