

4.導波管

4.1.矩形導波管

時間 t と位置 z に対する依存性は $e^{j\omega t - \gamma z}$ と仮定する。

(1)TE モード ($E_z = 0$)

$$\gamma E_y = -j\omega\mu H_x \quad (4.1.a)$$

$$-\gamma E_x = -j\omega\mu H_y \quad (4.1.b)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega\mu H_z \quad (4.1.c)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} + \gamma H_y = j\omega\epsilon E_x \quad (4.1.d)$$

$$-\gamma H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j\omega\epsilon E_y \quad (4.1.e)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = 0 \quad (4.1.f)$$

(4.1.b)より

$$H_y = \frac{\gamma}{j\omega\mu} E_x$$

(4.1.d)に代入して

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} + \frac{\gamma^2 E_x}{j\omega\mu} &= j\omega\epsilon E_x \\ E_x &= \frac{-j\omega\mu}{\gamma^2 + \omega^2\epsilon\mu} \frac{\partial H_z}{\partial y} = \frac{-j\omega\mu}{\beta_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} \end{aligned} \quad (4.2)$$

同様に、(4.1.a)、(4.1.e)から

$$E_y = \frac{j\omega\mu}{\beta_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (4.3)$$

(4.3)、(4.2)を、それぞれ(4.1.a)、(4.1.b)に代入して

$$H_x = \frac{-\gamma}{\beta_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (4.4)$$

$$H_y = \frac{-\gamma}{\beta_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad (4.5)$$

(4.1.c)に代入して

$$\begin{aligned} \frac{j\omega\mu}{\beta_c^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{j\omega\mu}{\beta_c^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} &= -j\omega\mu H_z \\ \therefore \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} &= -\beta_c^2 H_z \end{aligned} \quad (4.6)$$

H_z の変数分離解を仮定して、 $H_z = X(x)Y(y)$ とおくと

$$\begin{aligned} \frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y}{dy^2} &= -\beta_c^2 \\ \frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X}{dx^2} &= -\beta_x^2 \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -\beta_y^2 \quad (4.8)$$

$$\beta_x^2 + \beta_y^2 = \beta_c^2$$

(4.7)、(4.8)から

$$X(x) = A \sin \beta_x x + B \cos \beta_x x \quad (4.9)$$

$$Y(y) = C \sin \beta_y y + D \cos \beta_y y \quad (4.10)$$

$x = 0, a$ における境界条件 $E_y = 0$ を適用する

$$E_y = \frac{j\omega\mu}{\beta_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{j\omega\mu}{\beta_c^2} \beta_x (A \cos \beta_x x - B \sin \beta_x x) Y(y)$$

であるから、

$$A = 0 \quad (E_y = 0 \quad \text{at} \quad x = 0)$$

$$\sin \beta_x a = 0 \quad (E_y = 0 \quad \text{at} \quad x = a)$$

$$\therefore \beta_x = \frac{m\pi}{a}$$

同様に、 $y = 0, b$ における境界条件 $E_x = 0$ より

$$C = 0$$

$$\sin \beta_y b = 0 \quad \therefore \beta_y = \frac{n\pi}{b}$$

以上より、

$$H_z = H_0 \cos \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \quad (4.11.a)$$

但し、 n と m は同時に 0 にはならない。

$$E_x = \frac{j\omega\mu}{\beta_c^2} H_0 \frac{n\pi}{b} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (4.11.b)$$

$$E_y = -\frac{j\omega\mu}{\beta_c^2} H_0 \frac{m\pi}{a} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \quad (4.11.c)$$

$$H_x = \frac{\gamma}{\beta_c^2} H_0 \frac{m\pi}{a} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \quad (4.11.d)$$

$$H_y = \frac{\gamma}{\beta_c^2} H_0 \frac{n\pi}{b} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (4.11.e)$$

$$\beta_c^2 = \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 = \gamma^2 + \omega^2 \epsilon \mu$$

$$\therefore \gamma = \pm \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 - \omega^2 \epsilon \mu}$$

(2) TM モード ($H_z = 0$)

TE モードで E と H 、 $-j\omega\mu$ と $j\omega\epsilon$ を交換して、境界条件 $E_z = 0$ ($x = 0$ and a)、 $E_z = 0$ ($y = 0$ and b) を課すと、TE モードと同様に次の界成分が導出される。

$$E_z = E_0 \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (m, n \geq 1) \quad (4.12.a)$$

$$E_x = \frac{-\gamma}{\beta_c^2} E_0 \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (4.12.b)$$

$$E_y = \frac{-\gamma}{\beta_c^2} E_0 \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \quad (4.12.c)$$

$$H_x = \frac{j\omega\epsilon}{\beta_c^2} E_0 \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \quad (4.12.d)$$

$$H_y = \frac{-j\omega\epsilon}{\beta_c^2} E_0 \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (4.12.e)$$

$$\gamma = \pm \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2 \epsilon \mu}$$

(3)直交性

TE モードどうしの電磁界は、次の関係を満足する。

$$\begin{aligned} E_t^e &= \frac{j\omega\mu}{\beta_c^2} \left(-\frac{\partial H_z}{\partial y} \mathbf{i} + \frac{\partial H_z}{\partial x} \mathbf{j} \right) \\ H_t^e &= \frac{-\gamma}{\beta_c^2} \left(\frac{\partial H_z}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial H_z}{\partial y} \mathbf{j} \right) \\ \therefore E_t^e \cdot H_t^e &= \frac{-j\omega\mu\gamma}{\beta_c^4} \left(-\frac{\partial H_z}{\partial x} \frac{\partial H_z}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial x} \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

TM モードどうしの電磁界は、次の関係を満足する。

$$\begin{aligned} E_t^m &= \frac{-\gamma}{\beta_c^2} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial E_z}{\partial y} \mathbf{j} \right) \\ H_t^m &= \frac{j\omega\epsilon}{\beta_c^2} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} \mathbf{i} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \mathbf{j} \right) \\ \therefore E_t^m \cdot H_t^m &= \frac{-j\omega\epsilon\gamma}{\beta_c^4} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

4.2.円形導波管

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i}_r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \theta} - \frac{\partial H_\theta}{\partial z} \right) + \mathbf{i}_\theta \left(\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) + \mathbf{i}_z \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rH_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right) \quad (4.15)$$

(1)TE モード

Maxwell の方程式で $E_z = 0$ とおき、式を H_z について式を整理すると、次の関係式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} H_z \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} H_z + \beta_c^2 H_z &= 0 \\ (\beta_c^2 = \gamma^2 + \omega^2 \epsilon \mu) \end{aligned} \quad (4.16)$$

この方程式を、 $H_z = R(r)\Theta(\theta)$ と置いて、変数分離法で解くと次の関係式を得る。

$$\frac{r}{R(r)} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} R(r) \right) + \beta_c^2 r^2 = -\frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{d^2}{d\theta^2} \Theta(\theta)$$

すなわち、

$$\frac{r}{R(r)} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} R(r) \right) + \beta_c^2 r^2 = n^2 \quad (4.17)$$

$$\frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{d^2}{d\theta^2} \Theta(\theta) = -n^2$$

これより、 $R(r)$ と $\Theta(\theta)$ はそれぞれ次の微分方程式を満足しないといけない。

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR(r)}{dr} + \left(\beta_c^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) R(r) = 0 \quad (4.18)$$

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \Theta(\theta) = -n^2 \Theta(\theta) \quad (4.19)$$

(4.18)はベッセルの微分方程式でその解は次のようになる。

$$R(r) = A J_n(\beta_c r) + B Y_n(\beta_c r)$$

ここで、 $Y_n(\beta_c r)$ は $r = 0$ において ∞ に発散するので不適当である。

また、(4.19)の解は次のようになる。

$$\Theta(\theta) = C \cos n\theta + D \sin n\theta$$

θ の座標原点を適当に選べば関数 $\cos n\theta$ で表現できるので、結局(4.16)の解は次のように求まる。

$$H_z = H_0 J_n(\beta_c r) \cos n\theta \quad (4.20.a)$$

H_z 以外の電磁界成分は全て H_z によって次のように表される。

$$E_r = \frac{-j\omega\mu}{\beta_c^2} \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \theta} \quad (4.20.b)$$

$$E_\theta = \frac{j\omega\mu}{\beta_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial r} \quad (4.20.c)$$

$$H_r = \frac{-\gamma}{\beta_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial r} \quad (4.20.d)$$

$$H_\theta = \frac{-\gamma}{\beta_c^2} \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \theta} \quad (4.20.e)$$

$$(\beta_c^2 = \gamma^2 + \omega^2 \epsilon \mu)$$

(4.20.a)を用いれば、

$$E_\theta = \frac{j\omega\mu}{\beta_c^2} \beta_c H_0 J_n'(\beta_c r) \cos n\theta \quad (4.21)$$

$r = a$ で $E_\theta = 0$ より、 $\beta_c a$ は $J_n'(\beta_c a) = 0$ の根 q_{nm} となる。

$$\beta_c = \frac{q_{nm}}{a} \quad (4.22.a)$$

$$\gamma = \pm \sqrt{\left(\frac{q_{nm}}{a} \right)^2 - \omega^2 \epsilon \mu} \quad (4.23.b)$$

(2)TM モード

TE モードと同様の手順で $E_z = R(r)\Theta(\theta)$ についての微分方程式から、次のように整理される。

$$E_z = E_0 J_n(\beta_c r) \cos n\theta \quad (4.24.a)$$

$$E_r = \frac{-\gamma}{\beta_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial r} \quad (4.24.b)$$

$$E_\theta = \frac{-\gamma}{\beta_c^2} \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} \quad (4.24.c)$$

$$H_r = \frac{j\omega\varepsilon}{\beta_c^2} \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} \quad (4.24.d)$$

$$H_\theta = \frac{-j\omega\varepsilon}{\beta_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial r} \quad (4.24.e)$$

$$(\beta_c^2 = \gamma^2 + \omega^2 \varepsilon \mu)$$

このとき、

$$E_\theta = \frac{\gamma}{\beta_c^2} \frac{n}{r} E_0 J_n(\beta_c r) \sin n\theta \quad (4.25)$$

$r = a$ で $E_\theta = E_z = 0$ より、 $\beta_c a$ は $J_n(\beta_c a) = 0$ の根 p_{nm} となる。

$$\beta_c = \frac{p_{nm}}{a} \quad (4.26.a)$$

$$\gamma = \pm \sqrt{\left(\frac{p_{nm}}{a}\right)^2 - \omega^2 \varepsilon \mu} \quad (4.26.b)$$

4.3.遮断周波数

遮断周波数： $\gamma = 0$ となる周波数 ω_c

$\omega > \omega_c$ ： γ は純虚数 $\rightarrow$ 伝搬

$\omega \leq \omega_c$ ： γ は実数 $\rightarrow$ 伝搬しない（カットオフ）

遮断波長：

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{\omega_c \sqrt{\varepsilon \mu}} \quad (4.27)$$

伝搬モード

最も ω_c の小さいモード $\rightarrow$ 最低次モード

矩形導波管 ($a = 2b$)

ω_c の小さい順

TE₁₀

TE₂₀、TE₀₁

TE₁₁、TM₁₁

TE₂₁、TM₂₁、...

円形導波管

ω_c の小さい順

TE₁₁

TM₀₁

TE₂₁

TE₀₁、TM₁₁、...