2.分布定数線路

2.1.伝送線路方程式

二導体系線路で考える。

※導波管でも固有モードの横電界、横磁界成分に対応させて電圧、電流を定義すれば、二導体系線路と同様に扱うことができる。

$$V(z+\Delta z)=V(z)+\frac{dV(z)}{dz}\Delta z \tag{2.1.a}$$

$$I(z+\Delta z)=I(z)+\frac{dI(z)}{dz}\Delta z \tag{2.1.b}$$

ここで、伝送線路の等価回路を考えてみる。

理想的な導体であっても：

導体に電流が流れる→磁界が発生する→磁界のエネルギー→インダクタンスが存在

導体間の電位差→静電容量が存在

さらに：

導体の導電率は無限ではない（理想導体ではない）→導体に直列抵抗

導体間の媒質は理想的な絶縁体（誘電体）ではない→並列抵抗

これらを考えると、二導体系の線路の（単位長さ当たりの）等価回路は次のようになる（ただし、線路は伝搬方向で均一と仮定する）。

直列インピーダンス　$Z_d=R+j\omega L$　（Ω/m）

並列アドミッタンス　$Y_d=G+j\omega C$　（Ω^{-1}/m）

したがって、この等価回路について、次の関係式が成り立つ。

$$V(z)=(Z_d\Delta z)I(z)+V(z+\Delta z)$$

$$\frac{dV(z)}{dz}=-Z_dI(z) \tag{2.2}$$

$$\frac{dI(z)}{dz}=-Y_dV(z) \tag{2.3}$$

この微分方程式（電信方程式）は、次の微分方程式に帰着される。

$$\frac{d^2V(z)}{dz^2}=Z_dY_dV(z) \tag{2.4}$$

微分方程式の一般解は、次のようになる。

$$\therefore V(z)=V_1e^{-\gamma z}+V_2e^{+\gamma z} \tag{2.5}$$

$$I(z)=\frac{\gamma}{Z_d}(V_1e^{-\gamma z}-V_2e^{+\gamma z})=\frac{1}{Z_c}(V_1e^{-\gamma z}-V_2e^{+\gamma z}) \tag{2.6}$$

ここで、重要なパラメータ、γ：伝搬定数、Z_c：特性インピーダンスは次のようになる。

$$\gamma=\sqrt{Z_dY_d}=\sqrt{(R+j\omega L)(G+j\omega C)}=\alpha+j\beta \tag{2.7}$$

$$\frac{Z_d}{\gamma}=\sqrt{\frac{Z_d}{Y_d}}=\sqrt{\frac{R+j\omega L}{G+j\omega C}}=Z_c \tag{2.8}$$

特に、分布定数線路が無損失の場合 $R = G = 0$ であり、それぞれ次のようになる。

$$\gamma = \sqrt{j\omega L j\omega C} = j\omega\sqrt{LC} = j\beta \tag{2.9}$$

$$Z_c = \sqrt{\frac{j\omega L}{j\omega C}} = \sqrt{\frac{L}{C}} = R_c \tag{2.10}$$

ここで、β ：位相定数、R_c ：特性抵抗と呼ぶ。

2.2.反射係数と入力インピーダンス

z 座標は、電源を原点とした座標系である。これに対して、負荷を原点とし、電源に向かう方向を正とする y 座標を考える。線路の長さを l とすると $z + y = l$ という関係にあるから、$V(y)$、$I(y)$ は次のようになる。

$$V(y) = V_i e^{\gamma y} + V_r e^{-\gamma y} \tag{2.11.a}$$

$$I(y) = \frac{1}{Z_c}(V_i e^{\gamma y} - V_r e^{-\gamma y}) = I_i e^{\gamma y} + I_r e^{-\gamma y} \tag{2.11.b}$$

ここで、$e^{\gamma y}$ は y の負方向に向かう波動（負荷に対する入射波）、$e^{-\gamma y}$ は y の正方向に向かう波動（負荷からの反射波）を表す。また、それぞれの波の波動の振る舞いを考えると、次のようになる。

- $e^{\gamma y} = e^{\alpha y} e^{j\beta y}$ ：$e^{\alpha y}$ は y の負方向に沿って減衰し、$e^{j\beta y}$ は $\beta y = 2\pi$ を 1 周期として振動することを表す
- $e^{-\gamma y} = e^{-\alpha y} e^{-j\beta y}$ ：$e^{-\alpha y}$ は y の正方向に沿って減衰し、$e^{-j\beta y}$ は $\beta y = 2\pi$ を 1 周期として振動することを表す

$\beta y = 2\pi$ が 1 周期であることから、波長は次の式で位相定数 β と関係付けられる。

$$\beta\lambda = 2\pi \tag{2.12}$$

また、$y = 0$ (負荷端)において、次の関係が成り立つ。

$$V(0) = V_i + V_r$$

$$I(0) = \frac{1}{Z_c}(V_i - V_r) = I_i + I_r$$

$$Z_L = \frac{V(0)}{I(0)} \tag{2.13}$$

したがって、負荷端における電圧反射係数は次の式で与えられる。

$$\frac{V_r}{V_i} = \frac{Z_L - Z_c}{Z_L + Z_c} = S_v(0) \tag{2.14}$$

同じように計算すると、電流反射係数は $S_I(0) = -S_V(0)$ となる。

ここで、次のことがわかる。

- 無反射になる条件は $Z_L = Z_c$ (整合負荷)である。
- 負荷端から距離 y の位置にある任意の点 y において、入射電圧 $V_i e^{\gamma y}$ と反射電圧 $V_r e^{-\gamma y}$ の比を考えると、この点における反射係数は次の式で与えられる。

$$S(y) = \frac{V_r e^{-\gamma y}}{V_i e^{\gamma y}} = S(0) e^{-2\gamma y} \tag{2.15}$$

・この点において電圧$V(y)$と電流$I(y)$の比をとり、負荷を見込むインピーダンス$Z(y)$を定義する。

$$Z(y)=Z_c\frac{1+S(y)}{1-S(y)}=Z_c\frac{Z_L+Z_c\tanh\gamma y}{Z_c+Z_L\tanh\gamma y} \tag{2.16}$$

特に無損失線路の場合、$\tanh\gamma y=j\tan\beta y$となるので、

$$Z(y)=R_c\frac{Z_L+jR_c\tan\beta y}{R_c+jZ_L\tan\beta y} \tag{2.17}$$

また、線路の特性インピーダンスで規格化すれば、次のように表される。

$$z_L=\frac{Z_L}{Z_c} \tag{2.18.a}$$

$$S(0)=\frac{z_L-1}{z_L+1} \tag{2.18.b}$$

$$z(y)=\frac{z_L+\tanh\gamma y}{1+z_L\tanh\gamma y} \tag{2.18.c}$$

2.3.定在波分布

無損失伝送線路で考える。

$$V(y)=V_ie^{j\beta y}(1+S(0)e^{-j2\beta y}) \tag{2.19.a}$$

$$I(y)=\frac{V_ie^{j\beta y}}{R_c}(1-S(0)e^{-j2\beta y}) \tag{2.19.b}$$

ここで、

(a) $S(0)$は負荷インピーダンスと線路の特性インピーダンスで決まる。

(b) 複素平面上で、$-S(0)$は$S(0)$を原点中心に180°回転した位置にある。

(c) $S(0)e^{-j2\beta y}$は、複素平面上で$S(0)$を原点中心に角度$-2\beta y$だけ回転させることを意味する。

(d) 点(−1,0)から$S(0)e^{-j2\beta y}$, $-S(0)e^{-j2\beta y}$を結ぶベクトル$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$が、それぞれ電圧、電流に対応する。

$$A=S(0)e^{-j2\beta y}-(-1)=1+S(0)e^{-j2\beta y} \tag{2.20.a}$$

$$B=1-S(0)e^{-j2\beta y} \tag{2.20.b}$$

(e) yが変化すると$\pm S(0)e^{-j2\beta y}$は半径$|S(0)|$の円周上を回転する。

例えば、$S(0)e^{-j2\beta y}$が実軸上正の位置にあるとき$-S(0)e^{-j2\beta y}$は負の実軸上($|\boldsymbol{A}|$は最大、$|\boldsymbol{B}|$は最小)。→ $Z_{in}=V/I$は場所によって変化する。

周期$2\beta y=2\pi$（$y=\pi/\beta=\lambda/2$）で変化する。

$V(y)$、$I(y)$：定在波

(f) 定在波比：次のように定在波分布の極大、極小の比を考える。

$$\rho=\frac{|V(y)|_{\max}}{|V(y)|_{\min}}=\frac{1+|S(0)|}{1-|S(0)|} \tag{2.21}$$

$|V(y)|$が最大のとき、$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ともに実軸上。

→ $\boldsymbol{A}$と$\boldsymbol{B}$のなす角度（電圧と電流の位相差）が0

→ この点yから負荷側を見込む入力インピーダンスは純抵抗となる

$$Z_{in} = R_{\max} = \frac{|V|_{\max}}{|I|_{\min}} = R_c \frac{1+|S(0)|}{1-|S(0)|} = R_c \rho \qquad (2.22)$$

$|V(y)|$ が最小のとき、同様に入力インピーダンスは次式で与えられる。

$$Z_{in} = R_{\min} = \frac{|V|_{\min}}{|I|_{\max}} = R_c \frac{1}{\rho} \qquad (2.23)$$

(g) 特別な場合として：

(i) $Z_L = 0$ (終端短絡)の場合、$S(0) = -1$、$\lambda/2$ 周期で $V = 0$、$I \neq 0$（$Z_{in} = 0$）となる。また、この点から $\lambda/4$ だけ離れた点では、$V \neq 0$、$I = 0$ であるから $Z_{in} = \infty$（開放)。

(ii) $Z_L = \infty$ (終端開放)の場合、$S(0) = 1$、$\lambda/2$ 周期で $V \neq 0$、$I = 0$（$Z_{in} = \infty$）となる。この点から $\lambda/4$ だけ離れた点では、$Z_{in} = 0$（短絡)。

2.4. $\lambda/4$ インピーダンス変換器

無損失線路で考える。負荷インピーダンス Z_L を長さ l の伝送線路を通して見込む規格化入力インピーダンスは

$$z(l) = \frac{z_L + j\tan\beta l}{1 + jz_L \tan\beta l} \qquad (2.24)$$

したがって、$l + \lambda/4$ の点から負荷を見込むインピーダンスは、

$$z(l + \frac{\lambda}{4}) = \frac{z_L + j\tan\beta(l + \frac{\lambda}{4})}{1 + jz_L \tan\beta(l + \frac{\lambda}{4})} = \frac{jz_L \tan\beta l + 1}{j\tan\beta l + z_L} = \frac{1}{z(l)} \qquad (2.25)$$

つまり、

$$z(l + \frac{\lambda}{4}) z(l) = 1$$

$$\therefore Z(l + \frac{\lambda}{4}) Z(l) = R_c^2 \qquad (2.26)$$

ここで、抵抗負荷 R_L に、長さ $\lambda/4$、特性抵抗 R_x の無損失伝送線路を介して、特性抵抗 R_c の無損失伝送線路を接続する場合を考える。$\lambda/4$ 線路の特徴として、特性抵抗 R_x と特性抵抗 R_c の伝送線路の接続点から負荷側を見込むインピーダンス Z_{in} は、次の関係を満足する。

$$Z_{in} R_L = R_x^2 \qquad (2.27)$$

また、$Z_{in} = R_c$ であれば、特性抵抗 R_x と特性抵抗 R_c の伝送線路の接続点で反射波は生じない（特性抵抗 R_c の伝送線路にとって、負荷抵抗 $Z_{in} = R_c$ は整合負荷)。したがって、

$$R_x = \sqrt{R_c R_L} \qquad (2.28)$$

とすれば、特性抵抗 R_c の伝送線路には負荷からの反射が生じない。電力を消費するのは、負荷抵抗 R_L だけであるから、入射電力は全て負荷抵抗で消費される。

上記のことは、特性抵抗 R_x の線路が $\lambda/4$ 相当の長さの場合にのみ成立する。すなわち、周波数に依存する。

2.5.スミスチャート

図表を使ってZ_Lから直接$Z(y)$を求める。

(1) Z と S の対応

$$S = \frac{z-1}{z+1} = \frac{(r-1)+jx}{(r+1)+jx} = U + jV \tag{2.29}$$

(i) x を消去すると、r =一定の軌跡として次式が得られる。

$$\left(U - \frac{r}{r+1}\right)^2 + V^2 = \left(\frac{1}{r+1}\right)^2 \tag{2.30}$$

点(1,0)を通り、中心$(r/(r+1),0)$、半径$1/(r+1)$の円群。

(ii) r を消去すると、x =一定の軌跡として次式が得られる。

$$(U-1)^2 + \left(V - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2 \tag{2.31}$$

点(1,0)を通り、中心$(1,1/x)$、半径$1/x$の円（但し$0 \le r$）。

以上の、(i)及び(ii)を同一平面 U-V 上に描く。

→ $r + jx$ と $S = U + jV$ は一対一に対応。

(2) 観測点における反射係数　$S(0)e^{-j2\beta y}$

$r + jx$ で決まる点$S(0)$を$-2\beta y = -2\pi(2y/\lambda)$だけ回転 →$r' + jx'$ を読み取れば、その点から負荷を見込む規格化入力インピーダンスが求まる。