生体工学第一　　2014.5.14

第５回講義内容

１．第2回，第3回宿題の解説.
２．骨の形（長骨の半径と厚さに関する文献紹介）
３．長骨の半径と厚さの最適性に関する理論
　3.1　曲げ強度を基準にしたモデル（出席点）
　3.2　たわみを基準にしたモデル（出席点）
　3.3　衝撃荷重を基準にしたモデル（宿題）

配付資料の図

"BONES -structure and mechanics-",

Princeton University Press, pp.205

by J.D.Currey

骨の厚さと直径の関係について

骨の機能
・身体を支える（支持機能）
・血液を造る（造血機能）←髄液が必要

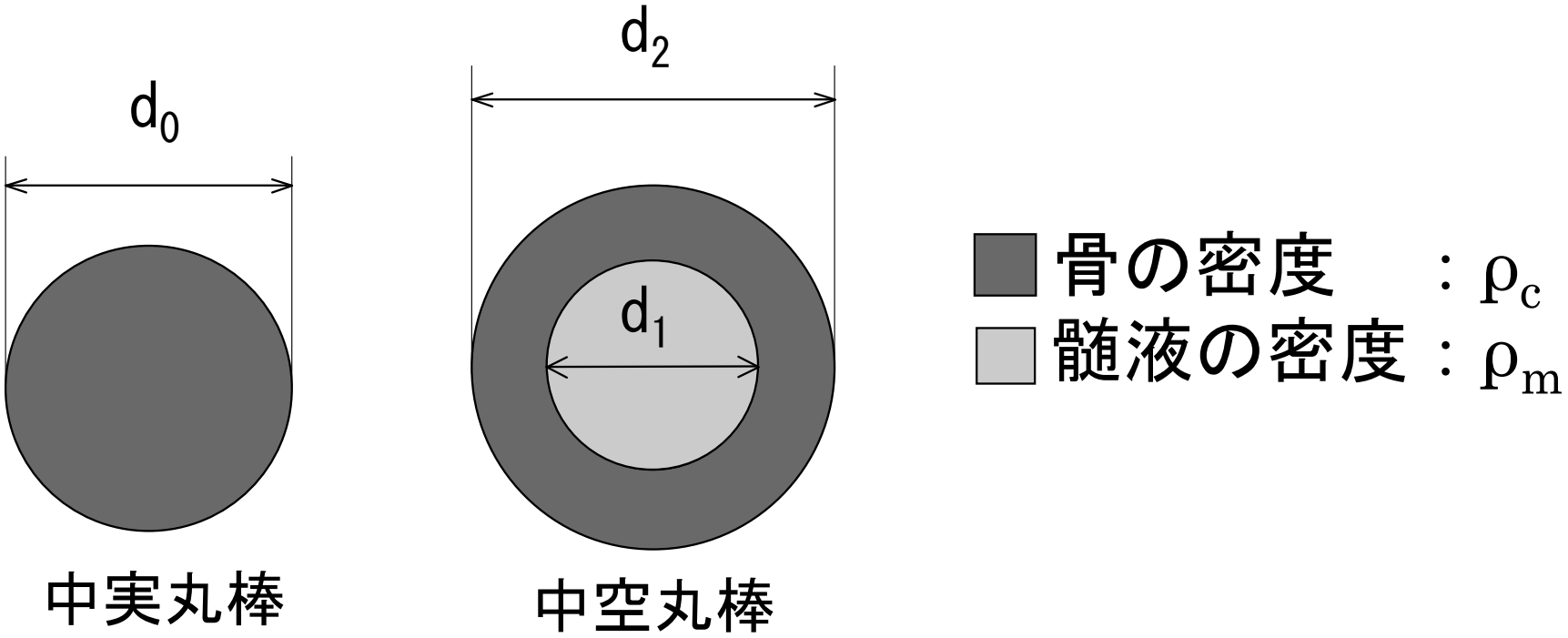
骨の強度が同じなら材料（骨）は少ない方がよい.
パイプ状構造は曲げモーメントを支えるのに有効.

⇩

厚さが薄くて半径が大きいほど有利？

質量比較のモデル化

方針：構造体としての強度が同じという条件下で中実丸棒を基準に中空丸棒の質量を比較.



曲げ強度を基準にした場合

曲げモーメントによって発生する応力

$$\sigma = \frac{M}{Z}$$

ただし,

$$\left(I_m = \frac{\pi}{64}(d_2^4 - d_1^4) \right)$$

断面係数

中実の場合： $Z_0 = I_0 / \left(\frac{d_0}{2} \right) = \frac{\pi}{32} {d_0}^3$

中空の場合： $Z_m = I_m / \left(\frac{d_2}{2} \right) = \frac{\pi}{32} {d_2}^3 \left(1 - \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^4 \right)$

強度を同じにする条件　$Z_0 = Z_m \quad \therefore {d_0}^3 = {d_2}^3 \left\{ 1 - \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^4 \right\}$

中実に対する中空の質量比

$$\frac{M_m}{M_0} = \frac{\frac{\pi}{4}\left(d_2^{\,2} - d_1^{\,2}\right)\rho_c + \frac{\pi}{4}\,d_1^{\,2}\,\rho_m}{\frac{\pi}{4}\,d_0^{\,2}\,\rho_c}$$

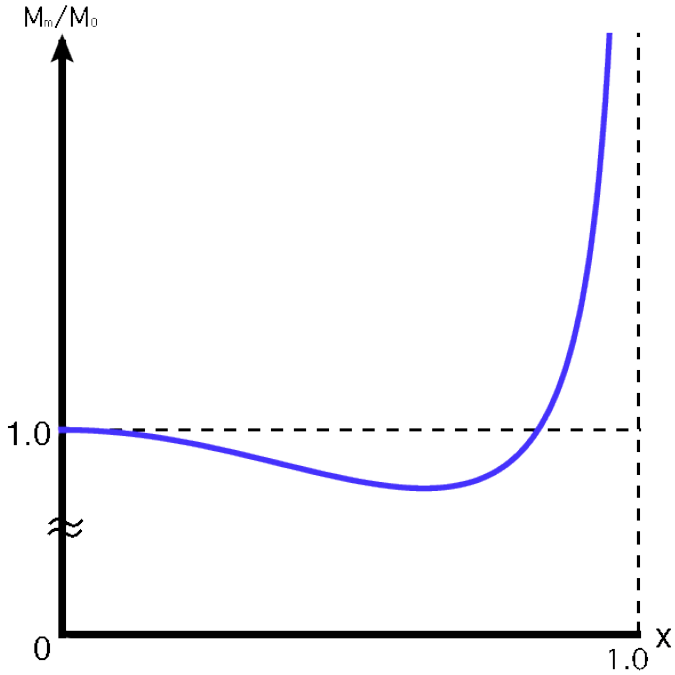
（単位長さ当たり）

$$= \frac{\rho_c\left\{1-\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2\right\} + \rho_m\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2}{\rho_c\left\{1-\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4\right\}^{\frac{2}{3}}}$$

質量比が最小となる R/t

骨密度ρ_c=2，髄液の密度ρ_m=1とし，$d_1/d_2=x$ とおく．

$$\frac{M_m}{M_0}=\frac{2-x^2}{2\left(1-x^4\right)^{\frac{2}{3}}}$$



x は 0 から 1 の範囲で変化

$x=0$（中実）で $M_m/M_0=1$

$x\to 1$（極めて薄い中空）で $M_m/M_0\to\infty$

質量比が最小となる x の値から R/t（外半径/厚さ）を計算せよ．

出席点　有効数字二桁程度

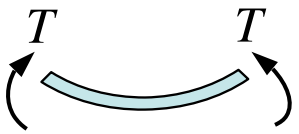
余裕のある人はM_m/M_0も求めて欲しい．

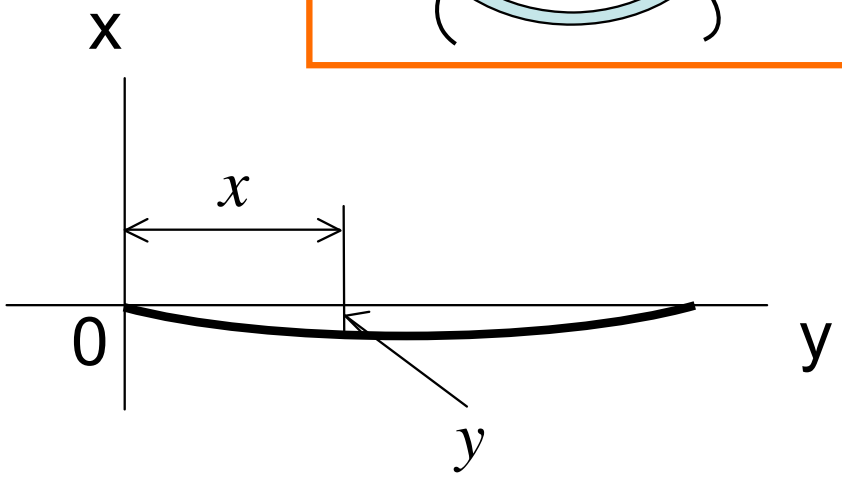
たわみ量を基準にした場合

はりのたわみの方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{T}{EI}$$

曲げモーメントの正方向





たわみ量$\propto I^{-1}$

$$\therefore I_0 = I_m$$

$$d_0{}^4 = d_2{}^4 \left(1 - \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4\right)$$

たわみ量を基準にした場合

$$\frac{M_m}{M_o} = \frac{\rho_c\left(d_2^2 - d_1^2\right) + \rho_m d_1^2}{\rho_c\sqrt{d_2^4 - d_1^4}}$$

$$= \frac{1 + \left(\frac{\rho_m}{\rho_c} - 1\right)\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4}}$$

$\rho_c=2$, $\rho_m=1$, $d_1/d_2=x$より

$$\frac{M_m}{M_o} = \frac{1 - 0.5x^2}{\sqrt{1 - x^4}}$$

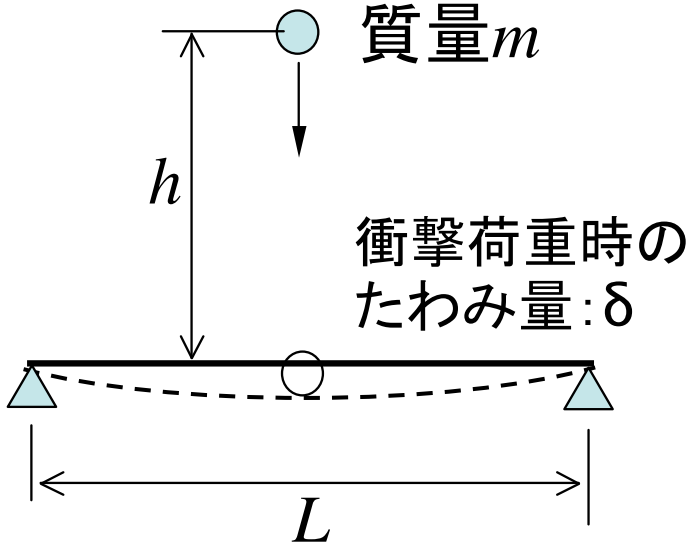
出席点:
M_m/M_0が最小となる
R/t を求めよ。

衝撃荷重を基準にした場合（宿題）

衝撃荷重で発生する応力値の見積り

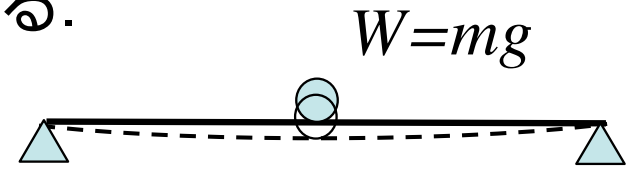
位置エネルギーがはりの弾性エネルギーに全て変換された時が応力の最大値.

$$mg(h+\delta) \approx mgh = \frac{1}{2}k\delta^2$$



はりのばね定数 k は以下の関係より求まる.

$$W = mg = k\delta_{st}$$



静荷重時の
たわみ量:δ_{st}

ここで $\delta_{st} = \dfrac{mgL^3}{48EI}$

衝撃荷重を基準にした場合

衝撃荷重時に発生する応力もたわみ量に比例して増大するので

$$\sigma = \frac{\delta}{\delta_{st}}\sigma_{st}$$

ここで静荷重時に発生する応力は $\sigma_{st} = \frac{T}{Z} = \frac{mgL}{4}\frac{d}{2I}$

以上より衝撃荷重時の応力は以下のように見積もられる.

$$\sigma = \sqrt{\frac{6mghEd^2}{4LI}} \propto \frac{d}{\sqrt{I}}$$

したがって中実丸棒と中空丸棒に成立すべき条件式は

$$\frac{d_0}{\sqrt{I_0}} = \frac{d_2}{\sqrt{I_m}} \qquad \text{ただし } I_m = \frac{\pi}{64}(d_2^4 - d_1^4)$$

第５回講義おわり