生体工学第一　　2014.4.30

第４回講義内容

１．フラクタルモデルの復習

２．出席点の解説（動物の鼓動数について）

３．枝分かれの法則

　3.1　樹木の枝分かれ（2.5乗則の復習）

　3.2　血管の３乗則

４．ホームワーク（血管の分岐角度）

樹木の枝の分岐則（2.5乗則）

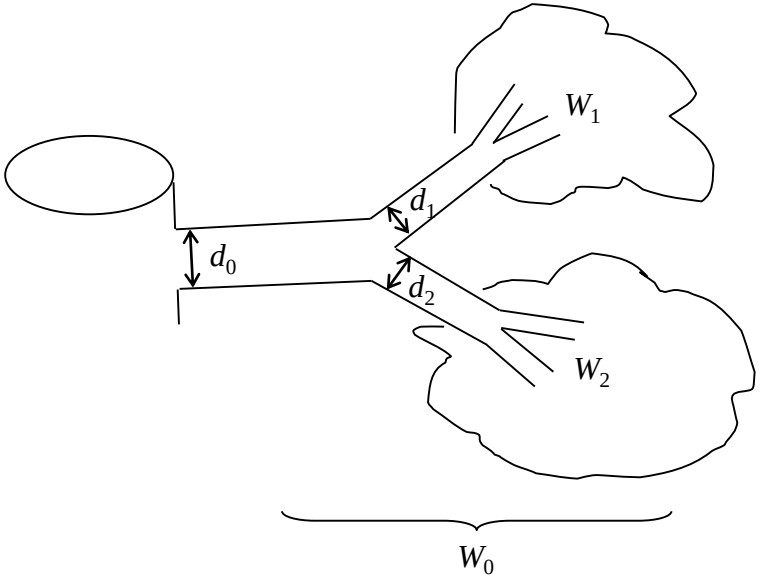
枝の重量と直径の関係

$$M \propto d^{2.5}$$

分岐した枝の関係

$$d_0^{2.5} = d_1^{2.5} + d_2^{2.5}$$

C.D.Murray(1927)



血管分岐の法則（３乗則）

$$r_0^n = r_1^n + r_2^n \qquad n = 2.8\sim3.2$$

C.D.Murray(1927)

フラクタルモデルでは，n=2と仮定しているが、計測から推定される指数はn=3である.

指数が２と３でどんな違いが出るのか.

n=2ならば分岐後も同じ流速になる.

n=3の場合には分岐後の流速はどうなる？

血管分岐の法則（３乗則）

$$r_0^n = r_1^n + r_2^n \qquad n = 2.8\sim3.2$$

C.D.Murray(1927)

血液供給は諸器官の活動を維持するのに必須.
→多すぎると無駄，少なすぎると支障
→したがって生命維持には適度な血液流量が必要
→何らかの法則性が成立していると予想.

Murray の最小仕事モデル

基本的な考え方（一本の血管について考える）

・血管半径が小さすぎると

→粘性抵抗が増大→機械的エネルギーが増大. （not good）

→管内血液が減少→化学的エネルギーが減少. （good）

・血管半径が大きすぎると

→粘性抵抗が減少→機械的エネルギーが減少. （good）

→管内血液が増大→化学的エネルギーが増大. （not good）

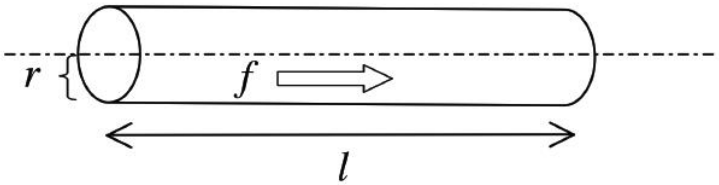
※化学的エネルギー：血管内の血液を活性化させておくのに必要なエネルギー. 管内血液量に比例（小さい方がよい）.

機械的エネルギーE_mと化学的エネルギーE_cの総和の最小化

Murray の最小仕事モデル（続き）

$$F = E_m + E_c = \Delta p f + kV$$ （k は定数）

$$f = \frac{\Delta p}{l}\frac{\pi r^4}{8\mu}$$ より



$$F = \frac{8\mu f^2 l}{\pi r^4} + k\pi r^2 l$$

仮定：血管内はポアズイユ流れ

（両端の圧力差をΔpとする．）

F の最小値を求めるために F を r で偏微分すると以下の関係式が得られる.

$$= \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{k}{\mu}} = const.$$

←この計算が出席点

機械的エネルギー E_m

Δpf が単位時間当たりの機械的エネルギーに相当する理由

◎仕事は Fx で定義される.

◎断面積Aの管内の流体がΔtにΔxだけ押し出されている状況を考える.

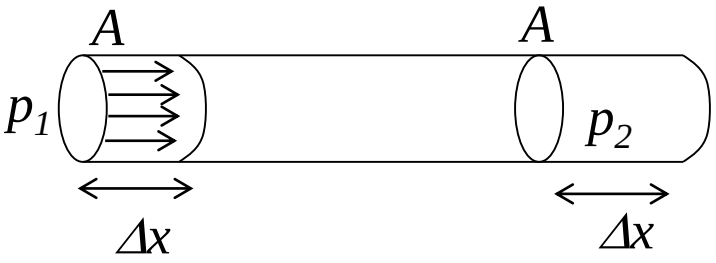
入口側で液体に対してなされる仕事は $p_1 A\Delta x$.
出口側の面では，圧力 p_2 が常に加わっている状態なので，
流体が外部に対して行う仕事は $p_2 A\Delta x$.
したがって，管内で流体の運動に必要なエネルギーは

$$p_1 A\Delta x - p_2 A\Delta x = (p_1 - p_2) A\Delta x = \Delta p A\Delta x$$

単位時間当たりでは

$$\Delta p A\Delta x/\Delta t = \Delta pf$$

となる.



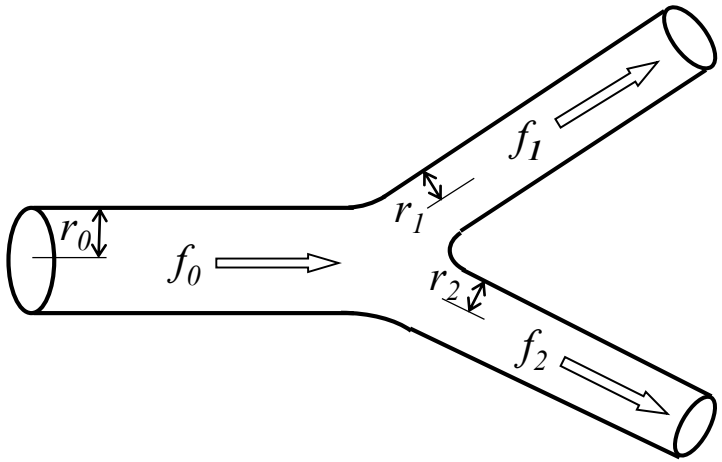
Murray の最小仕事モデル（続き）

入口側，出口側の流量を f_0, f_1, f_2 とすると

$$\frac{f_0}{r_0^3} = \frac{f_1}{r_1^3} = \frac{f_2}{r_2^3}$$

$f_0 = f_1 + f_2$　より

$$r_0^3 = r_1^3 + r_2^3$$



血管の適応フィードバック

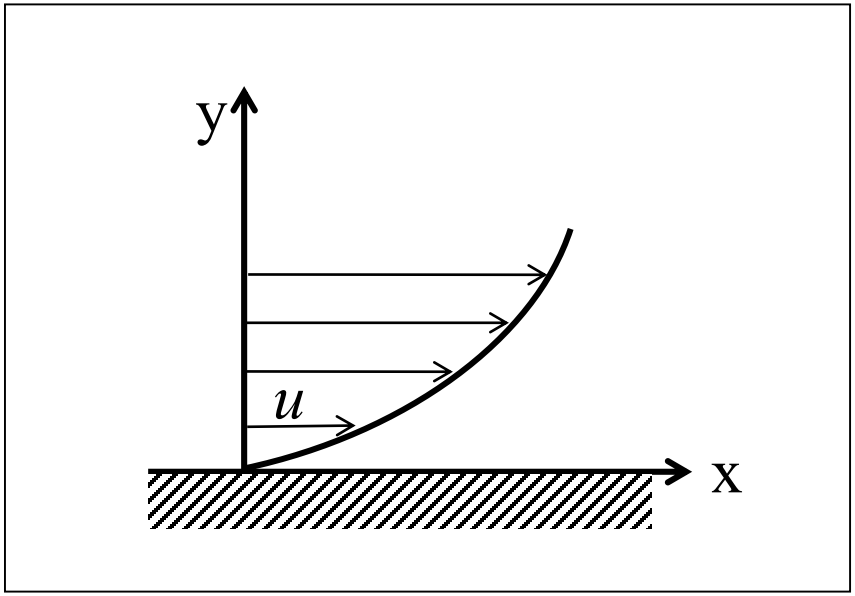
血管の３乗則は血管半径の大小を問わず成立.

→血管自身が血流を把握する機能があるはず.

→学説：血管内壁に作用するずり応力を検出（神谷ら，1980）

ずり応力

$$\tau = \frac{du}{dy} \cdot \mu$$

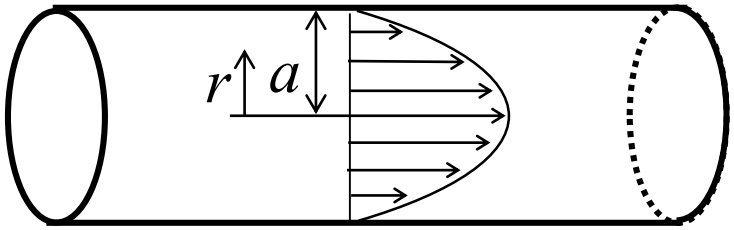


円管内ずり応力の導出

管内流れ　$u = \left(-\dfrac{dp}{dx}\right)\dfrac{1}{4\mu}a^2\left\{1-\left(\dfrac{r}{a}\right)^2\right\}$

$f = \left(-\dfrac{dp}{dx}\right)\dfrac{\pi a^4}{8\mu}$　の関係から

$$u = \frac{2f}{\pi a^2}\left\{1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right\}$$



$\tau = -\mu \left.\dfrac{du}{dr}\right|_{r=a} =$

←この計算が出席点

（注意：上図の座標の取り方のため，ずり応力の式にマイナスの符号が付く．）

第４回講義おわり