

## 第2回講義内容

1. 生物に学ぶことは役に立つか？
2. 出席点の問題：  
枝の2.5乗則（出席点）
3. 基礎代謝率
4. 0.75乗則：熱放散による説明（前回の復習）
5. 0.75乗則：二つの学説
  - 5.1 弾性相似則モデル
  - 5.2 フラクタルモデル（次回に講義）

# 出席点：枝の2.5乗則を示せ

---

枝と重量と周径の実測結果  
Murray(1927)

枝の重量と  
直径の関係

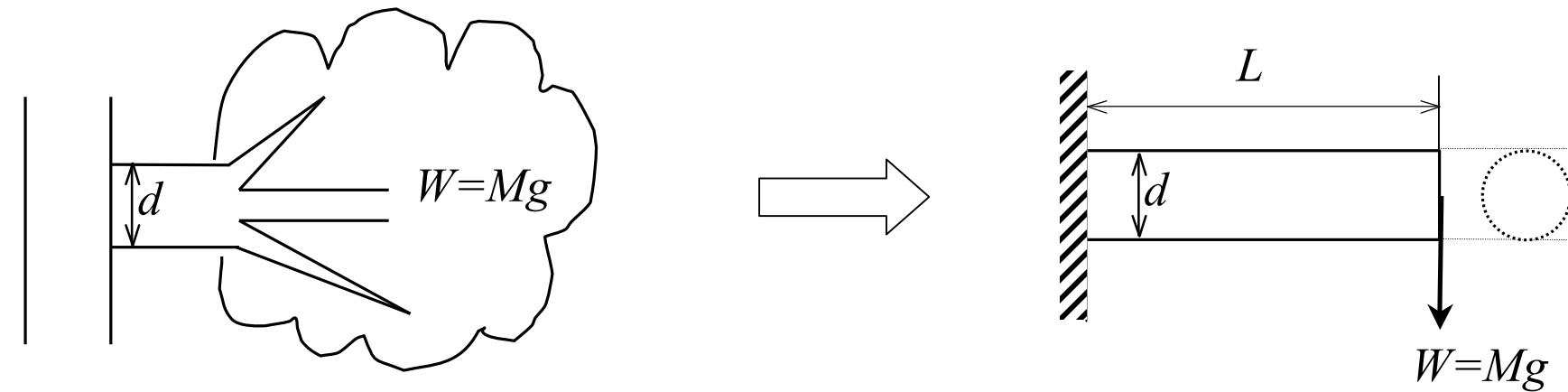
$$W \propto C^{2.5}$$

配付資料参照



$$M \propto d^{2.5}$$

# 枝の力学モデル



$$\sigma = \frac{MgL}{Z} = \frac{WL}{Z} \quad (1)$$

$$Z = \text{断面係数} \quad (2)$$

$$W = Mg = \frac{\pi d^2}{4} L \rho g \quad (3)$$

Mとdの関係式  
(Lは消去される)

$\rho$  : 枝を直はりとしてモデル化したときの平均質量密度 [kg/m<sup>3</sup>]

# 樹木の枝の分岐則 (2.5乗則)

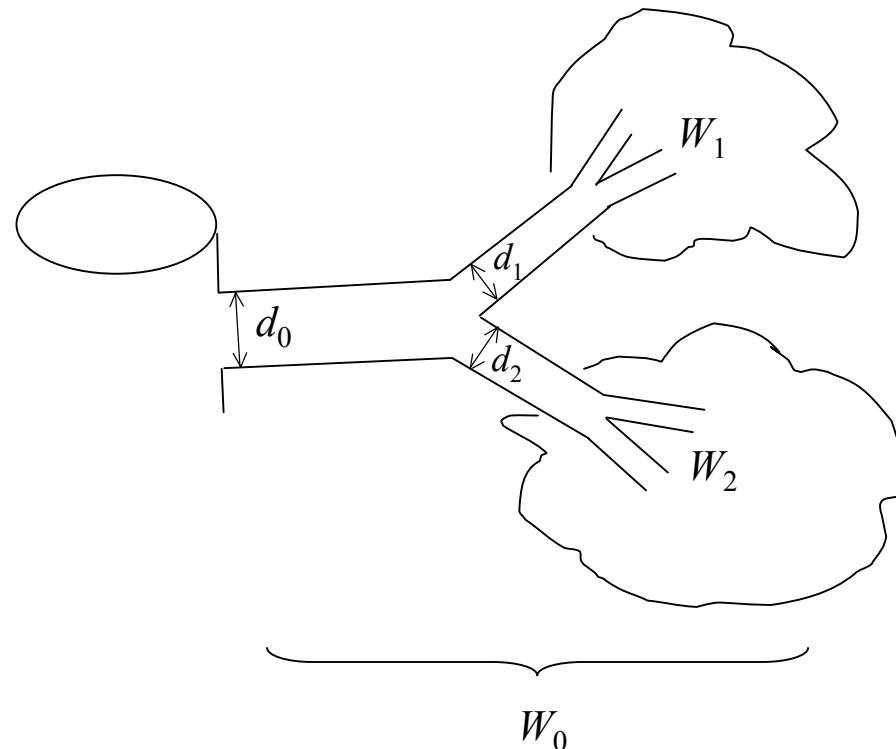
枝の重量と直径の関係

$$W \propto M \propto d^{2.5}$$

分岐した枝の関係

$$d_0^{2.5} = d_1^{2.5} + d_2^{2.5}$$

C.D.Murray(1927)



## 2. 5乗則の導出

---

枝を片もちはりでモデル化

式の導出にどんな仮定が設定されているか

- ・枝の強度を曲げ応力で評価
- ・枝は幹に対して垂直(→別の角度ならどうなる?)
- ・枝は円柱形(断面形状はどこも同じ)
- ・枝は相似形(葉の付き方はどの木もほぼ同じ)
- ・木材は均質で材質、密度は木の種類によらず同じ

# 動物の代謝率：0.75乗則

---

生物の質量 $M_b$ と安静時の単位時間当たりの代謝エネルギー $P$ との間には、両対数軸上できれいな線形関係が成立している。

配付資料参照

From *Scaling*,  
K.S.Nielsen

# 基礎代謝率と生物の質量の関係

---

$$P \propto M_b^{0.75}$$

0.75乗則

単位質量あたりでは

$$P_u \propto M_b^{-0.25}$$

# 熱放散の考え方では指数はいくつになるか

---

まず、生物の形を球体(半径  $r$ )と仮定して指数を求める。

考え方：

生物の質量  $M_b$  は  $r^3$  に比例

身体から出る熱量は表面積  $S$  に比例。(  $S$  は  $r^2$  に比例)

単位時間当たりの熱量が基礎代謝率  $P$  に比例。

$P$  と  $M_b$  の関係から指数は. . .

生物の形を円柱と仮定したら 0.75 になるのでは？

結論：体表面積が最小となる条件下でも 0.75 乗則は説明できない。

# どうやって0.75乗を説明するのか？

---

なるべく多くの動物に共通する現象で説明したい。

- それが可能ならば、より説得力が出る。
- 学説として価値があると評価される。

「弹性相似則モデル」は何に注目したのか？

# 指数0.75の導出

---

McMahon (1973年) の学説

基本的な考え方：

地上（重力下）で動物が体躯の形状を維持するには筋肉を活動させる必要があり、これが基礎代謝率に関係していると考える。（胴体が大きければ、筋肉の断面積も増えるが質量も増加する。胴体を弾性体と仮定すると、動物の胴体の長さと質量の間には、折れ曲がりにくさに関して相似的な関係があると予想される。）

# 弾性相似則を適用

身体の折れ曲がりにくさを数式で表現

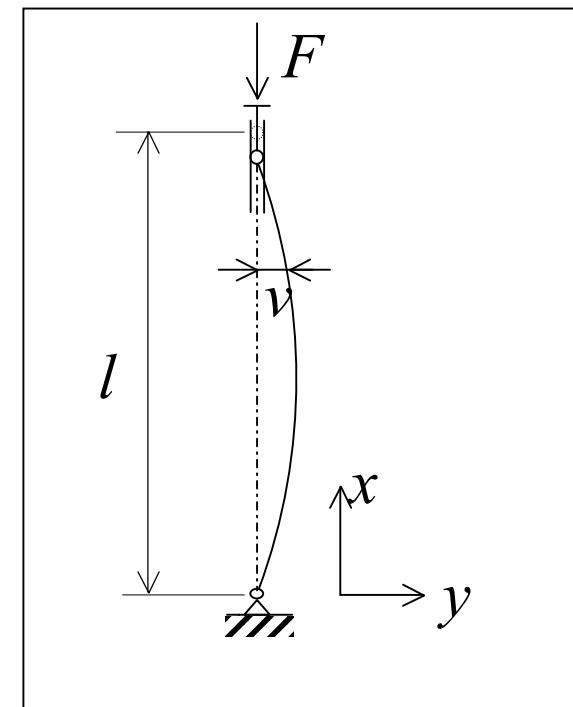


弾性はりの座屈条件を利用

$$F = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

$E$ : ヤング率

$I$ : 断面二次モーメント



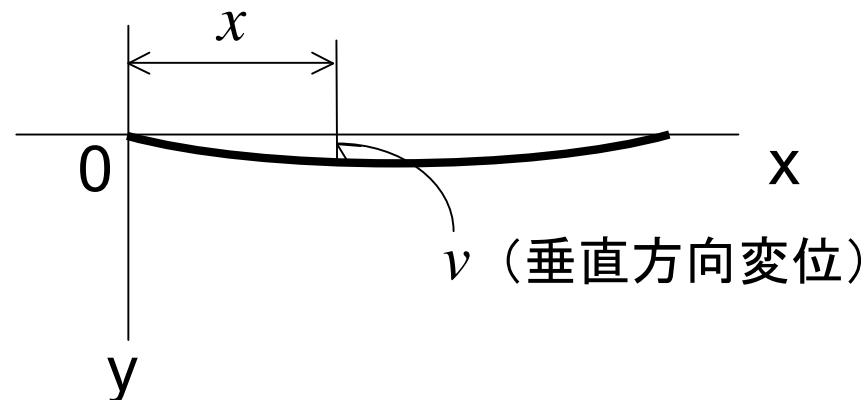
# 座屈条件の導出

はりのたわみの方程式

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

$EI$ : 曲げ剛性

曲げモーメントの正方向



なぜ  $\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI}$  となるのか？

軸線から  $y$  離れた箇所でのひずみは  $\frac{y}{r} = \varepsilon$

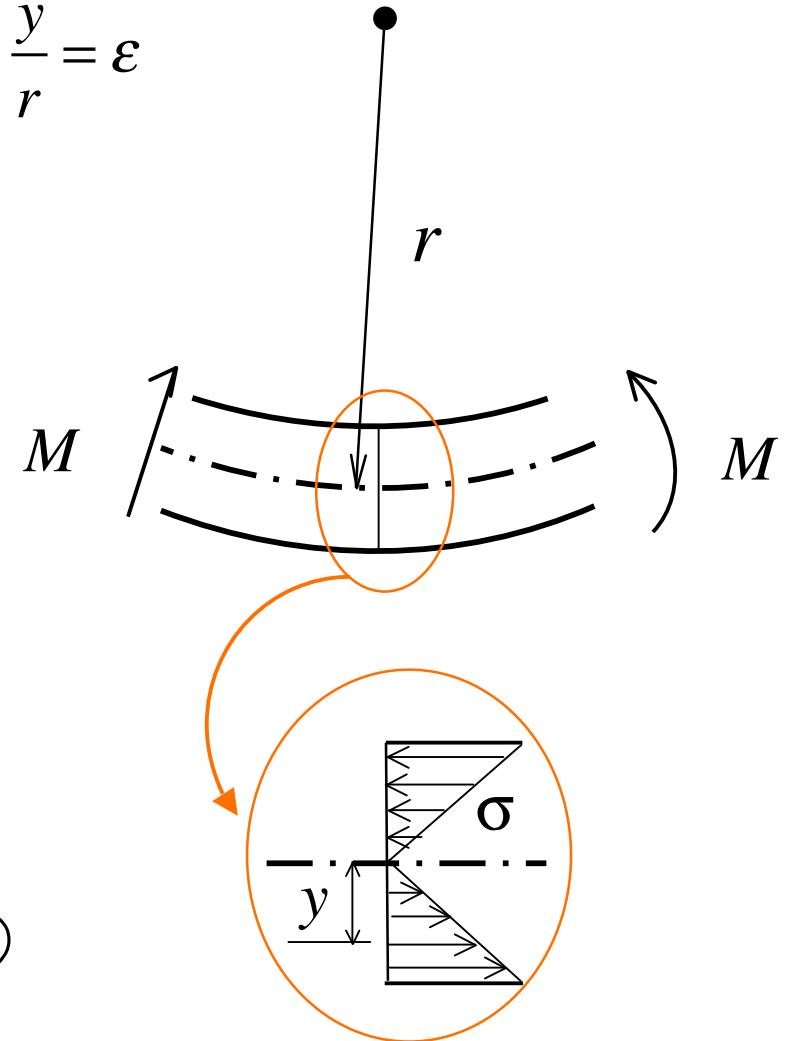
$$\text{応力は } \sigma = E\varepsilon = \frac{y}{r}E$$

したがってモーメント  $M$  は

$$M = \int_A \sigma y dA = \frac{E}{r} \int_A y^2 dA = \frac{EI}{r}$$

一方、曲率半径の式は

$$\frac{1}{r} = \frac{\frac{d^2v}{dx^2}}{\left\{1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}} \approx \frac{d^2v}{dx^2} \quad (\text{変形が小さい場合})$$

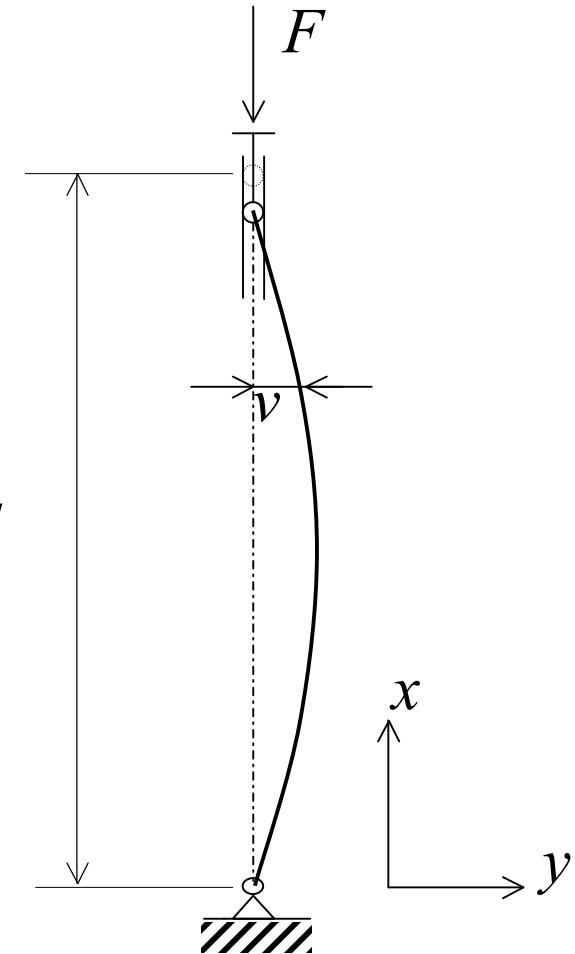


# 座屈条件の導出（続）

はりを縦方向にして考える

内力と外力とのつりあいの条件式を考えると、次式のようになる。

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} + Fv = 0$$



# 座屈条件の導出（続）

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} + Fv = 0$$

微分方程式の解

$$v = C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x$$

ここで  $\alpha = \sqrt{\frac{F}{EI}}$

境界条件

$$x=0 \text{ で } v=0 \rightarrow C_1 = 0$$

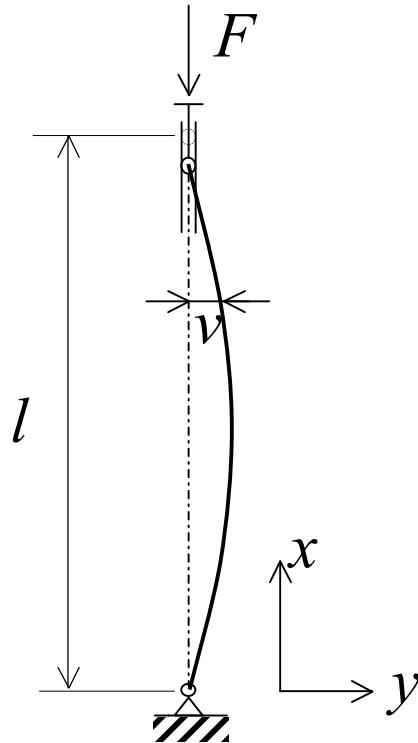
$$x=l \text{ で } v=0 \rightarrow C_2 \sin \alpha l = 0.$$

2番目の境界条件で  $C_2 = 0$  は意味がない。

$\rightarrow \alpha l = m\pi$  ( $m$ は整数) が成立する必要がある。

$$F = m^2 \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

$m=1$  のときオイラーの座屈条件という。



# 弾性相似則（続き）

---

$F$  は胴体の重量に比例すると仮定

$$F \propto \pi d^2 l \rho g$$

$\rho$  : 見かけ上の密度

$g$  : 重力加速度

$d$  : 胴体の直径

座屈しない限界長さ  $l_k$  と直径  $d$  の関係

$$l_k^3 \propto d^2$$

胴体質量( $l_k d^2$ )は全体の質量  $M_b$  に比例すると仮定すると

$$d \propto M_b^{\frac{3}{8}}$$

# 筋肉の活動

---

身体が座屈しないように胴体の筋肉が活動  
(収縮) する仕事量を見積もる.

筋肉の仕事量       $W \propto \sigma A \Delta l$        $\sigma$  : 筋肉の単位面積あたりの収縮力

単位時間当たり       $P \propto \sigma A \frac{\Delta l}{\Delta t}$        $A$  : 筋肉の断面積  
                           $\Delta l$  : 収縮長さ  
                           $\Delta t$  : 収縮時間

筋肉の収縮力, 収縮速度は一定と仮定

$$P \propto M_b^{\frac{3}{4}}$$

# 0.75乗則を導き出すために必要な仮定

---

- ・基礎代謝量に重力が関与している。  
(身体の姿勢を維持するエネルギーに関係)
- ・動物の胴体は弾性体で近似できる。  
(材料が一様な円柱とみなすことができる。)
- ・胴体の折れ曲がりにくさにオイラーの座屈条件を適用可能である。
- ・座屈条件の荷重は生物体の質量に比例する。
- ・筋肉の動作特性はどの動物も同じ。
- ・生物全体の質量は胴体の質量に比例。

## 0.75乗則：もう一つの学説

---

G. B. West, J. H. Brown and B. J. Enquist,  
Science, Vol. 276, pp. 122–126 (1997)

次回の講義で紹介

**第2回講義おわり**