となる．ここで，$\bar{\boldsymbol{y}}^T\boldsymbol{y} = \|\boldsymbol{y}\|^2$ はゼロでない実数であるので $\lambda = \bar{\lambda}$ を得る．

注：$\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$，$\boldsymbol{y} = (a_1 + ib_1, a_2 + ib_2, \ldots, a_n + ib_n)^T$ の場合，$\|\boldsymbol{y}\|^2 = \boldsymbol{y}^T\bar{\boldsymbol{y}} = \bar{\boldsymbol{y}}^T\boldsymbol{y} = \sum_{k=1}^{n}(a_k - ib_k)(a_k + ib_k) = \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)$ となる．

(b) $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ を λ, μ の相異なる固有値に対応する固有ベクトルとする．すなわち，

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{y} = \lambda\boldsymbol{y} \quad \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}, \quad \overline{\boldsymbol{B}}\bar{\boldsymbol{z}} = \mu\bar{\boldsymbol{z}}, \quad \boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{0}.$$

このとき，

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{z}}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{y} &= \bar{\boldsymbol{z}}^T(\lambda\boldsymbol{y}) = \lambda\bar{\boldsymbol{z}}^T\boldsymbol{y}, \\ \bar{\boldsymbol{z}}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{y} &= \bar{\boldsymbol{z}}^T\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{y} = \mu\bar{\boldsymbol{z}}^T\boldsymbol{y} \end{aligned}$$

となる．よって，

$$0 = \bar{\boldsymbol{z}}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{y} - \bar{\boldsymbol{z}}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{y} = (\lambda - \mu)\bar{\boldsymbol{z}}^T\boldsymbol{y}.$$

仮定より，$\lambda \neq \mu$ であるから，$\bar{\boldsymbol{z}}^T\boldsymbol{y} = 0$ を得る．

注：ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ において，$\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$ と $\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^n$ の内積は $\boldsymbol{y}^T\bar{\boldsymbol{z}} = \bar{\boldsymbol{z}}^T\boldsymbol{y} = \sum_{k=1}^{n}(a_k^y + ib_k^y)(a_k^z - ib_k^z)$ として定義される．

以上のことから異なる固有値に対する固有ベクトルは直交している．さらに，$\boldsymbol{B}\boldsymbol{y} = \lambda\boldsymbol{y}$ であれば，両側を $\|\boldsymbol{y}\| = \sqrt{\boldsymbol{y}^T\bar{\boldsymbol{y}}}$ で割ることによって

$$\boldsymbol{B}\frac{\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{y}\|} = \lambda\frac{\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{y}\|}$$

ノルムが 1 の固有ベクトル $\boldsymbol{p} = \frac{\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{y}\|}$ を得ることができる．その他の部分は実対称行列の場合と同じなので省略する．

11.1 Gersgorin の定理（弱い形）

定理：n 次複素正方行列 $\boldsymbol{H} = (h_{ij})$ の任意の固有値 λ は

$$G_k := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - h_{kk}| \leq r_k\}, \qquad r_k = \sum_{j=1,\ j\neq k}^{n} |h_{kj}|$$

で定義される，複素平面上の n 個の円 G_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ の和集合 $\bigcup_{k=1}^{n} G_k$ の中にある．

証明：$\boldsymbol{H}$ の固有値 λ と対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ としたとき，$\boldsymbol{H}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ より，

$$\sum_{j=1}^{n} h_{ij}x_j = \lambda x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

となる．ここで $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ を $|x_k| = \max_j |x_j| \neq 0$ とおくと，

$$\sum_{j=1,\ j\neq k}^{n} h_{kj}x_j + h_{kk}x_k = \lambda x_k$$

になるので，

$$|\lambda - h_{kk}| \leq \sum_{j=1,\ j\neq k}^{n} |h_{kj}| \frac{|x_j|}{|x_k|} \leq \sum_{j=1,\ j\neq k}^{n} |h_{kj}| = r_k$$

を得る．

<u>例：</u>

$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} -2 & -i \\ i & 5 \end{pmatrix}$ の固有値は $\frac{3\pm\sqrt{53}}{2}$ であり，$r_1 = 1, \quad r_2 = 1$ となるので，

$$G_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z+2| \leq 1\}, \qquad G_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-5| \leq 1\}$$

の Gersgorin の円が得られる．図 19 を参照．

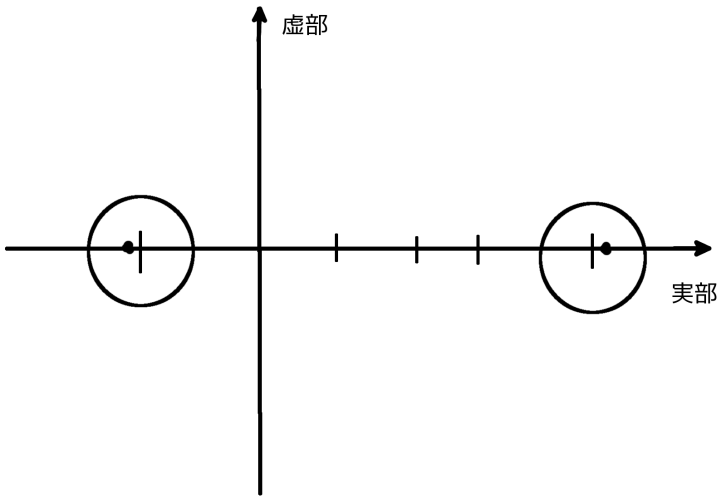

図 19: $\boldsymbol{H}$ に対する Gersgorin の円．