

応用線形代数—第5回レポート

東京工業大学 大学院 情報理工学研究科 数理・計算科学専攻
理学部 情報科学科
福田光浩

2014年度前期

提出〆切 5月19日(月) 15時まで

レポートボックス3-3 応用線形代数

学籍番号の一番最後の桁の数を a とする. 例えば, 12B56789 ならば $a = 9$ とする.

1. $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ と $e \in \mathbb{R}^3$ を以下のように定義する.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) A のべき乗のうち $A^2, A^3, A^4, A^5, A^{10}, A^{100}$ を求めよ.
(b) $x = (A^{100})^{-1}e$ とするとき, ベクトル x の第2成分を求めよ.
(c) 自然数 n に対する A^n を (a) の結果から推測し, 数学的帰納法により証明せよ.

2. 3×3 の対称行列 B を以下のように定義する.

$$B = \begin{pmatrix} 4 \times (a+1) & a+1 & -\sqrt{a+1} \\ a+1 & 4 \times (a+1) & -(a+1) \\ -\sqrt{a+1} & -(a+1) & 4 \times (a+1) \end{pmatrix}$$

- (a) B の固有値のうち, 負の固有値の数を答えよ.
(b) Matlab のコマンドで $[P, D] = \text{eig}(B)$ とすると, B の固有値を対角成分にもつ対角行列 D と固有ベクトルを列とする行列 P に分解できる. PDP^{-1} と B の差を Matlab のノルムで評価せよ.
(c) $PD^{-1}P^{-1}$ と B^{-1} の差を Matlab のノルムで評価せよ.
(d) Matlab では, 行列 X について, $Y = \text{sqrt}(X)$ とすると X の各成分の平方根を成分に持つ行列 Y が得られる. これを $Y = \sqrt{X}$ と書くこととする. ここで, $B^{1/2}$ を $B^{1/2} = P\sqrt{D}P^{-1}$ で定義したときに, $(B^{1/2})^2$ と B の差を Matlab のノルムで評価せよ.