複素解析第一　補足資料　(2014 年 5 月 23 日配布)

・べき級数の合成のべき級数展開

2 つのべき級数

$$f(z) = \sum_{n\geq 1} a_n z^n, \quad g(w) = \sum_{n\geq 0} b_n w^n$$

を考える。それぞれの収束半径を ρ_1, ρ_2 とする。$f(z)$ は定数項がないので $f(0) = 0$ である。定理 2.2.8 から f は $z = 0$ で複素微分可能なので命題 2.2.5 より $z = 0$ で連続であるから、$\epsilon > 0$ を十分小さくとれば、$f(D(\epsilon)) \subset D(\rho_2)$ である。よって合成関数 $g(f(z))$ は $D(\epsilon)$ で定義されている。

この関数 $g(f(z))$ のべき級数展開を求めることを考える。形式的に $w = f(z)$ を代入すると、

$$\begin{aligned} g(f(z)) = b_0 + b_1(a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots) + b_2(a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots)^2 \\ + b_3(a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots)^3 + \dots \end{aligned} \tag{0.0.1}$$

となる。これは形式的には[*1]

$$b_0 + b_1 a_1 z + (b_1 a_2 + b_2 a_1^2) z^2 + (b_1 a_3 + 2 b_2 a_1 a_2 + b_3 a_1^3) z^3 + \dots \tag{0.0.2}$$

と展開できる。次の命題は、このように求めた級数が収束し、$g(f(z))$ に一致することを保証する。

命題 2.3.2 上のようにして定めたべき級数 (0.0.2) は正の収束半径を持ち、十分小さい z に対して[*2] $g(f(z))$ に等しい。 □

証明. 命題 2.3.1 により非負整数 k に対して $f(z)^k$ は z のべき級数に展開できる。それを

$$f(z)^k = \sum_{n=0}^{\infty} a_{kn} z^n$$

とおく。$a_0 = 0$ なので $n < k$ のとき $a_{kn} = 0$ であり、a_{kn} は $a_1, a_2, \cdots$ たちの非負整数係数の（普遍的な）多項式である。これを $g(w)$ の展開式に代入して

$$\begin{aligned} g(f(z)) &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k \sum_{n=0}^{\infty} a_{kn} z^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} b_k a_{kn} z^n \end{aligned}$$

[*1] つまり順序交換を許せば

[*2] あとで示す一致の定理を仮定すれば、「収束円内のすべての点 z に対して」とできる。

となる。$\alpha_{kn} := b_k a_{kn} z^n$ とおいてこれを二重級数 $\sum_k \sum_n \alpha_{kn}$ とみなすとき、$\sum_k (\sum_n |\alpha_{kn}|)$ は収束することを示す。まず

$$\begin{aligned}\sum_k \left(\sum_n |\alpha_{kn}| \right) &= \sum_k \left(\sum_n |b_k a_{kn} z^n| \right) \\ &= \sum_k |b_k| \left(\sum_n |a_{kn} z^n| \right) \end{aligned} \tag{0.0.3}$$

と書ける。ここで

$$F(z) := \sum_{n=1}^{\infty} |a_n z|^n$$

とおくとき、これは十分小さい z に対して収束し連続であり、$F(0) = 0$ を満たす。すると（すぐ後で示すように）

$$\sum_n |a_{kn} z^n| \leq F(z)^k \tag{0.0.4}$$

が成り立つ。これが示せれば、(0.0.3) より

$$\sum_k \left(\sum_n |\alpha_{kn}| \right) \leq \sum_k |b_k| F(z)^k$$

となり、$F(0) = 0$ と F の $z = 0$ での連続性から右辺は十分小さい z（$|F(z)|$ が $\sum_k b_k w^k$ の収束半径よりも小さくなるようなすべての z）に対して収束するので、問題の収束性が言える。

評価式 (0.0.4) を示そう。そのためには、

$$F(z)^k = \sum_{n=k}^{\infty} A_{kn} |z|^n$$

とおくとき

$$|a_{kn}| \leq A_{kn}$$

が成り立つことを示せばよい。しかしこれは、

- a_{kn} が $a_1, a_2, \ldots$ の非負整数係数の多項式であること
- A_{kn} は、a_{kn} の a_i を $|a_i|$ で置き換えたものにほかならないこと

から、三角不等式を使って直ちに得られる。 □