解析学演習 B 第一　第 5 回　2014 年 5 月 9 日

1 (☆☆) $a \in \mathbb{C}$ とし、関数 $f(z), g(z)$ を次式で定める。

$$f(z) = e^{a \log(1+z)}, \quad g(z) = (1+z)^a.$$

(1) $f(z)$ のべき級数展開を計算し、$g(z)$ のべき級数展開と比較して z^4 の係数までは一致することを確かめよ。
(2) $y = f(z)$ は微分方程式

$$(1+z)\frac{dy}{dz} = ay$$

を満たすことを示し、$f(z) = g(z)$ であることを示せ。

2 (☆☆) $w = f(z) = z + z^2$ とする。$f(0) = 0, f'(0) = 1 \neq 0$ であるから、$w = 0$ の近傍で定義された逆関数 $z = g(w)$ が存在する。
(1) 逆関数定理の証明の方法を用いて、$g(w)$ の展開式を w^4 の項まで求めよ。
(2) $w = z + z^2$ を z に関して直接解いて、上記の逆関数 $z = g(w)$ のべき級数展開を求めよ。

3 (☆☆) $w = f(z) = \tan z$ とする。ここで

$$\tan z = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \cdots$$

であった。$f(0) = 0, f'(0) = 1 \neq 0$ であるから、$w = 0$ の近傍で定義された逆関数 $z = g(w)$ が存在する。
(1) 逆関数定理の証明の方法を用いて $g(w)$ の展開式を w^4 の項まで求めよ。
(2) $w = \tan z$ が方程式

$$\frac{dw}{dz} = 1 + w^2$$

を満たすことを使って上記の逆関数 $g(w)(= \arctan w)$ の展開式を求めよ。

4 (☆☆) 三角関数について以下の (1)–(4) をそれぞれ次の二通りの方法で示せ。

- 指数関数の性質を使う。
- 一致の定理ないし関数関係不変の原理を使う。(実数に対しては既知とする。)

(1) $\cos(z + 2n\pi i) = \cos z$, $\sin(z + 2n\pi i) = \sin z$, $\forall n \in \mathbb{Z}$,
(2) $\cos(z + \frac{\pi}{2}) = -\sin z$, $\sin(z + \frac{\pi}{2}) = \cos z$,
(3) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$,
(4) $\sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w, \quad \cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w.$

5 (☆) $\sin z$, $\cos z$ の実部と虚部を x, y を使って表せ。($z = x + iy$ である。)

6 (☆☆) 次の各主張は正しいか。
(1) $\mathbb{C}$ から $\mathbb{C}$ への写像 $z \mapsto e^z$ は全射である。
(2) $\mathbb{C}$ から $\mathbb{C}$ への写像 $z \mapsto \sin z$ は全射である。
(3) $\mathbb{C}$ から $\mathbb{C}$ への写像 $z \mapsto \cos z$ は全射である。

7 (☆☆) (1) $\sin z$ の零点（値が 0 となる点) をすべて求めよ。
(2) $\sin z$ の値が実数になるような z をすべて求めよ。
(3) $|x| > 1$ なる実数 x に対して $\arcsin x$ を x の初等関数として表せ。

8 (☆) 関係式

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

をべき級数展開を使って証明せよ。

(以上)