解析学演習 B 第一　第 4 回　2014 年 5 月 2 日

1 (☆☆) $a, b, c \in \mathbb{C}$, $c \notin \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ とする。次のべき級数を超幾何級数 (hypergeometric series) という：

$$F(a, b, c, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} z^n \tag{0.1}$$

ただし、$\alpha \in \mathbb{C}$ に対して

$$(\alpha)_n = \begin{cases} 1 & n = 0, \\ \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n-1), & n \geq 1 \end{cases}$$

である。

(1) $F(a, b, c, z)$ の収束半径を求めよ。(a, b が特別な値を取るときを考慮しなければならないことに注意。)

(2) 以下を示せ。

$$F(a, b, b, z) = (1-z)^{-a}, \quad zF(1, 1, 2, z) = -\log(1-z),$$
$$zF\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, z^2\right) = \arcsin z, \quad zF\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, -z^2\right) = \arctan z.$$

(3) 次のべき級数 (合流型超幾何級数という) の収束半径を求めよ。ただし $c \notin \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ とする。

$$F(a, c, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n n!} z^n.$$

2. (☆☆) 次の線形常微分方程式（超幾何微分方程式という）

$$z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2} + \big(c - (a+b+1)z\big)\frac{dy}{dz} - aby = 0$$

は定数倍を除いてただ一つの収束べき級数解 $y = \sum_{n \geq 0} c_n z^n$ を持ち、それは超幾何級数 (問 1) で与えられることを示せ。ただし $c \notin \mathbb{Z}$ とする。

3. (?) 合流型超幾何級数 (問 1 (3)) の満たす微分方程式を求めよ。

4 (☆☆) $a \in \mathbb{C}$ に対して $f_a(z) = (1+z)^a$ とおく。
(1) 次を示せ：

$$(1+z)\frac{d}{dz}\big(f_a(z)f_b(z)\big) = (a+b)f_a(z)f_b(z), \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

(2) (1) と問題 2.2.12[*1]を用いて、次を示せ：

$$f_a(z)f_b(z) = f_{a+b}(z).$$

(3) (2) を用いて、任意の複素数 a, b と任意の自然数 n に対して次式が成り立つことを示せ：

$$\sum_{k+l=n} \binom{a}{k}\binom{b}{l} = \binom{a+b}{n}.$$

(4) (1), (2) にならって、任意の複素数 a, b に対して次式がなりたつことを示せ。

$$f_{ab}(z) = f_a(z)^b.$$

5 (☆) 指数法則

$$e^{z+w} = e^z e^w$$

を、べき級数の積の展開式を使って証明せよ。

6 (☆) 指数法則 $e^{z+w} = e^z e^w$ を、次の順序で示せ。
(1) 微分方程式

$$\frac{dy}{dz} = y$$

のべき級数解は

$$1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \cdots + \frac{1}{n!}z^n + \cdots$$

の定数倍しかないことを示せ。
(2) $y = e^{z+w}$ および $\tilde{y} = e^z e^w$ をそれぞれ z の関数とみるとき、これらは (1) の微分方程式の解であることを示せ。
(3) (1) と (2) を用いて指数法則を示せ。

7 (それぞれ☆) 次の関数のべき級数展開を z^4 まで計算せよ。

(1) $\dfrac{z}{e^z - 1}$　(2) $\dfrac{1}{1+\sin z}$　(3) $(1 - 2z\cos\theta + z^2)^a$　(4) $e^{-\frac{xz}{1-z}}$　(5) $\cos\left(\frac{az}{\sqrt{1+z}}\right)$

[*1] 微分方程式

$$(1+z)\frac{dy}{dz} = ay$$

の解が $f_a(z)$ の定数倍に限ること。